Др Шефкет Арсланагић

О ПОБОЉШАЊУ ЈЕДНЕ НЕЈЕДНАКОСТИ

Приликом доказивања теореме о конвергенцији низа чији је општи члан

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbf{N}$$

доказује се да је овај низ растући и ограничен одозго. Доказује се да важи

(1) $$2 \leqslant a_n < 4,$$

или

(2) $$2 \leqslant a_n < 3.$$

Очигледно, неједнакост (2) је боља (јача) од неједнакости (1). Овдје ћемо доказати обје неједнакости (1) и (2), али ћемо доказати још бољу (јачу) неједнакост, која гласи

(3) $$2 \leqslant a_n < 2{,}75.$$

1° Докажимо најприје (1). Како је

(4)
$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n^n} \\ &= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Из (4) се види да је $a_n > 2$, јер је $1 - \dfrac{k-1}{n} > 0$ за све $k = 2, 3, \ldots, n$. Вриједи $a_n = 2$ само за $n = 1$. Дакле, вриједи $a_n \geqslant 2$ за све $n \in \mathbf{N}$.

Докажимо сада да је $a_n < 4$, $n \in \mathbf{N}$. Овдје ћемо користити познату неједнакост Бернулија (Jacob Bernoulli, 1654–1705, швајцарски математичар холандског поријекла) која гласи

(5) $$(1 + x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x,$$

гдје је $x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant -1$, $\alpha \in \mathbf{Q}$, $\alpha \geqslant 1$. Једнакост у (5) вриједи у случају када је $x = 0$ или када је $\alpha = 1$. Овдје нећемо доказивати неједнакост (5), тај доказ се може наћи у одговарајућој литератури о неједнакостима, нпр. [2].

Узмимо сада да је $x = 1$ и $\alpha = 1 + \dfrac{2}{n} > 1$, $n \in \mathbf{N}$; добијамо због (5),

$$4^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{1+\frac{2}{n}} = \frac{1}{2}(1+1)^{1+\frac{2}{n}} > \frac{1}{2}\left[1 + 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{n}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n},$$

тј. $1 + \dfrac{1}{n} < 4^{\frac{1}{n}}$, а одавде $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 4$, што је и требало доказати.

2° Докажимо сада неједнакост (2), тј. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$. Како је $1 - \dfrac{k-1}{n} < 1$ за све $k = 2, 3, \ldots, n$, из (4) слиједи

$$a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

а одавде због

$$k > 2 \implies k! > 2^{k-1} \implies \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}},$$

добијамо

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Користећи образац за суму чланова геометријског низа имамо да је збир на десној страни последње неједнакости једнак $2 + 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$, што је очигледно мање од 3, па је и $a_n < 3$, што је и требало доказати.

3° Докажимо сада неједнакост (3). Из (4), због $1 - \dfrac{k-1}{n} < 1$, $2 \leqslant k \leqslant n$ слиједи

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n},$$

$(n \geqslant 2)$. За $n \geqslant 3$ вриједи

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-3}},$$

или

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-3}}\right). \tag{6}$$

Опет у (6) користимо образац за суму чланова геометријског низа па добијамо

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-3}}\right). \tag{7}$$

Како је $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2 \cdot 3^{n-3}} < \dfrac{3}{2}$, то добијамо сада из (7)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2{,}75,$$

што је и требало доказати. Но, ова неједнакост вриједи, осим за $n \geqslant 3$, такођер и за $n = 1$ и $n = 2$.

Рецимо да граничну вриједност низа чији је општи члан $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$ означавамо са e,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Притом је $2 < e < 3$. Доказано је да је e трансцендентан број, тј. он не представља рјешење ниједне алгебарске једначине с цјелим коефицијентима. Даћемо првих десет децимала броја e: $e = 2{,}7182818284\ldots$. Напоменимо да се доказ теореме о трансцендентности броја e може наћи нпр. у [3].

Напомена. Пошто сам у међувремену успио доказати да вриједи неједнакост

$$a_n < 2{,}7351852\ldots \tag{8}$$

која је боља (јача) од неједнакости (3), то ћемо овдје дати тај доказ. У 2° смо доказали да је

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \tag{9}$$

Докажимо да вриједи неједнакост

$$n! > 3^{n-2}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{10}$$

За $n = 1$ добијамо $1 > 1/3$, тј. неједнакост је тачна. За $n \geqslant 2$ ћемо доказати дату неједнакост помоћу математичке индукције. Имамо:

1° $n = 2$: $2! > 3^{2-2} \iff 2 > 1$ (тачно);

2° нека је за неко $n \geqslant 2$: $n! > 3^{n-2}$. Множећи ову неједнакост са неједнакошћу $n+1 \geqslant 3$ која је тачна (једнакост вриједи само за $n = 2$), добијамо $(n+1)! > 3^{n-1}$, тј. неједнакост вриједи и за $n+1$. Дакле, (10) вриједи за све $n \in \mathbf{N}$.

Из неједнакости (10) добијамо неједнакост

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{3^{n-2}}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{11}$$

Примјењујући (11) у (9) за $n = 6, 7, 8, \ldots$ добијамо

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\left(\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\cdots+\frac{1}{3^{n-6}}\right)\\ &= \frac{163}{60}+\frac{1}{81}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-6}}\right) = \frac{163}{60}+\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-5}}\right)\\ &< \frac{163}{60}+\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1477}{540} = 2{,}7351852\ldots\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Брачковић, М., *Математика. Диференцијални рачун функција једне промјенљиве*, Свјетлост, Сарајево, 1985.

[2] Korowkin, P.P., *Ungleichungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.

[3] Перић, В., *Алгебра, II дио*, Свјетлост, Сарајево, 1980.

[4] Сивашински, Я. Х., *Задачник по элементарной математике*, Наука, Москва, 1966.