Миомир Анђић

ЗАНИМЉИВА ПРИМЈЕНА ВИЕТОВИХ ПРАВИЛА

1. Виетове[1] формуле нашле су примјену у разним математичким проблемима. Једна од њихових најинтереснатнијих примјена је код налажења неких коначних збирова облика:

$$(a+b)^m+(a-b)^m,\quad a,b\in\mathbf{C},\ m\in\mathbf{Z}\quad \text{и}\quad 3^k+7^k+\cdots+(4n-1)^k,\quad n,k\in\mathbf{N}.$$

Подсјетимо се да за квадратну једначину

$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$

чија су рјешења x_1 и x_2, поменуте формуле гласе:

$$x_1+x_2=-p\quad \text{и}\quad x_1x_2=q.$$

На основу њих се, у разним проблемима везаним за једначине и неједначине, лако налазе збирови: x_1+x_2, $x_1^2+x_2^2$, $x_1^3+x_2^3$, $x_1^4+x_2^4$. Очигледно је $x_1^kx_2^k=q^k$, али како наћи збир

$$x_1^k+x_2^k,\quad k\in\mathbf{N}\,?$$

Одговор на постављено питање даје нам сљедеће тврђење.

Тврђење. *Ако је $S_k=x_1^k+x_2^k$, гдје су x_1 и x_2 рјешења квадратне једначине $x^2+px+q=0$ и $k\geqslant 2$, онда је*

$$S_k+pS_{k-1}+qS_{k-2}=0.$$

[1] Франсоа Виет (Francois Viète, 1540–1603), велики француски математичар, отац савремене симболике у алгебри. Припада му увођење слова за означавање не само непознатих него и познатих величина, означавање разних степена истим словом и везивање општих бројева знацима рачунских операција (1591). Наиме, он је поред осталог и у једначине, умјесто бројних коефицијената, увео слова – опште бројеве, која су онда омогућавала сажимање општих извођења.

Карактеристично је да је начелно искључивао негативна рјешења једначина (енглески математичар Хариот (Thomas Harriot, 1560–1621), мисли да може доказати да једначине смију имати само позитивна рјешења). Једначина $x^2=-4x-3$ је прва позната квадратна једначиан којој су оба рјешења назначена као негативна: $x_1=-3$, $x_1=-1$ (A. Girard, *Invention nouvelle en algebre*, Amsterdam, 1629). Од њега потиче рјешавање једначине $ax^2+bx+c=0$ супституцијом $x=y+z$. Такође, први је употријебио заграде у данашњем облику (1593). Напомињемо да је раније умјесто заграде употребљавана једна водоравна црта, која је стављана изнад оног израза који би требало заградити, отприлике исто онако као што се то данас чини код ознаке за коријен.

Пријатељевао је са нашим математичаром Мерином Геталдићем (1566–1626).

Доказ. Како су x_1 и x_2 рјешења квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$, то важи

$$(2) \qquad x_1^2 + px_1 + q = 0, \qquad\qquad (3) \qquad x_2^2 + px_2 + q = 0.$$

Помножимо ли (2) са x_1^{k-2} а (3) са x_2^{k-2}, њиховим сабирањем добијамо

$$(x_1^k + x_2^k) + p(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) + q(x_1^{k-2} + x_2^{k-2}) = 0,$$

тј. $S_k + pS_{k-1} + qS_{k-2} = 0$, што је и требало доказати. ■

Из ове формуле можемо израчунати $S_k = x_1^k + x_2^k$ ако знамо S_{k-1} и S_{k-2}.

Како је $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2$ и $S_1 = x_1 + x_2 = -p$, налазимо даље:

$$S_2 = -pS_1 - qS_0 = (-p)(-p) - 2q = p^2 - 2q, \qquad \text{тј.} \;\; x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q,$$
$$S_3 = -pS_2 - qS_1 = -p(p^2 - 2q) - q(-p) = -p^3 + 3pq, \;\; \text{тј.} \;\; x_1^3 + x_2^3 = -p^3 + 3pq.$$

Слично се налази

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= p^4 - 4p^2q + 2q^2, \\ x_1^5 + x_2^5 &= -p^5 + 5p^3q - 5pq^2, \\ x_1^6 + x_2^6 &= p^6 - 6p^4q + 9p^2q^2 - 2q^3, \\ x_1^7 + x_2^7 &= -p^7 + 7p^5q - 14p^3q^2 + 7pq^3, \end{aligned}$$

итд.

2. Примјери

Примјер 1. Израчунати $\left(\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^7 + \left(\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^7$.

Нека су $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}$ рјешења једначине (1). Тада је $p = -(x_1 + x_2) = -1$ и $q = x_1x_2 = -3$. Из $S_7 = x_1^7 + x_2^7 = -p^7 + 7p^5q - 14p^3q^2 + 7pq^3$ слиједи

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)^7 + \left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)^7 &= -(-1)^7 + 7(-1)^5(-3) - 14(-1)^3(-3)^2 + 7(-1)(-3)^3 \\ &= 343. \end{aligned}$$

Примјер 2. Не развијајући степене одредити вриједност израза

$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^k} + \frac{1}{(1-\sqrt{2})^k}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Очигледно су $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ рјешења једначине $x^2 - 2x - 1 = 0$, јер је $p = -2$ и $q = -1$. На основу доказаног тврђења је $S_k - 2S_{k-1} - S_{k-2} = 0$, односно

$$S_{k-2} = S_k - 2S_{k-1},$$

гдје је $S_k = x_1^k + x_2^k$, при чему се лако види да то тврђење важи не само за $k \in \mathbf{N}$, већ и за $k \in \mathbf{Z}$. Замјењујући k редом са 1, 0, -1, -2, -3, ..., добијамо

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = S_{-1} = S_1 - 2S_0 = 2 - 2\cdot 2 = -2,$$
$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(1-\sqrt{2})^2} = S_{-2} = S_0 - 2S_{-1} = 2 - 2(-2) = 6,$$
$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^3} + \frac{1}{(1-\sqrt{2})^3} = S_{-3} = S_{-1} - 2S_{-2} = -2 - 2\cdot 6 = -14,$$
$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^4} + \frac{1}{(1-\sqrt{2})^4} = S_{-4} = S_{-2} - 2S_{-3} = 6 - 2(-14) = 34,$$
$$\frac{1}{(1+\sqrt{2})^5} + \frac{1}{(1-\sqrt{2})^5} = S_{-5} = S_{-3} - 2S_{-4} = -14 - 2\cdot 34 = -82,$$

итд.

Примјер 3. Знајући збирове $\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$ за $k \in \{1,2,3,4,\dots\}$ израчунати

$$3^k + 7^k + 11^k + \cdots + (4n-1)^k.$$

Користећи добијену формулу $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ имамо

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 &= 3^2 - 2\cdot 1\cdot 2,\\
3^2 + 4^2 &= 7^2 - 2\cdot 3\cdot 4,\\
5^2 + 6^2 &= 11^2 - 2\cdot 5\cdot 6,\\
&\cdots\cdots\\
(2n-1)^2 + (2n)^2 &= (4n-1)^2 - 2(2n-1)\cdot 2n.
\end{aligned}$$

Сабирајући одговарајуће стране једнакости имамо

$$\begin{aligned}
3^2 + 7^2 + 11^2 + \cdots + (4n-1)^2 &= \sum_{i=1}^{2n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot 2i\\
&= \sum_{i=1}^{2n} i^2 + 4\left(2\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i\right),
\end{aligned}$$

а знајући да је $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, налазимо

$$\begin{aligned}
&3^2 + 7^2 + 11^2 + \cdots + (4n-1)^2\\
&\quad= \frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(2\cdot 2n+1) + 4\left(2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&\quad= \frac{n}{6}(32n^2 + 24n - 2).
\end{aligned}$$

Користећи остале добијене релације за $x_1^k + x_2^k$ добијамо вриједности збирова

$$3^k + 7^k + 11^k + \cdots + (4n-1)^k, \quad k \in \{3,4,5,\dots\}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

3. Задаци за самосталан рад

1. Не развијајући биноме одреди вриједност израза $(1+\sqrt{2})^{-2000}+(1-\sqrt{2})^{-2000}$.
2. Бар на три начина израчунати вриједност израза $(1+i\sqrt{3})^{1999}+(1-\sqrt{3})^{1999}$.
3. Наћи збир $(n+1)^i+(n+2)^i+\cdots+(2n)^i$, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$.
4. За природан број n израз:
   i) $1^{2000}+2^{2000}+\cdots+n^{2000}$ је дјељив са $n+1$;
   ii) $1^{2000}+2^{2000}+\cdots+(2n)^{2000}$ је дјељив са n.
   Доказати.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Драгиша А. Стевановић, *Елементарна и векторска алгебра*, Завод за издавање уџбеника СРС, Београд, 1968.

[2] Ђуро Курепа, *Виша алгебра I*, Завод за издавање уџбеника СРС, Београд, 1969.