Др Ариф Золић

ВЕРИЖНИ РАЗЛОМЦИ И ПРИМЈЕНЕ

Да бисмо открили или видјели нешто необично, нешто тајанствено, често се мисли да морамо отићи негдје далеко, одлетјети чак у космос или спустити се на дно океана; у непосредној нашој околини све је добро познато, нема ничега необичног и тајанственог! То је, у ствари, велика заблуда! Ми смо окружени многим непознатим и неиспитаним стварима и појавама, али не обраћамо довољно пажњу на све то, па нам се чини да су то обичне ствари и појаве, добро познате. Овдје ћемо посматрати једу, слободније речено, тајну из историје математике.

У уџбеницима се наводи, то и ученици знају, да је Архимед нашао за број π приближну вриједност $22/7$. На ту чињеницу смо навикли, па и не размишљамо о тајни која је ту скривена. Зашто је Архимед узео баш седмине? Зашто није узео, на примјер, осмине? Питање је врло занимљиво. Потпуно поуздан одговор сигурно не можемо дати, али врло вјероватан можемо. Одговор се заснива на појму и особинама верижног разломка.

Дефиниција 1. Коначним верижним разломком назива се израз облика

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}, \tag{1}$$

гдје је a_0 цијели ненегативни број, а $a_1, a_2, \ldots, a_n$ су природни бројеви при чему је $a_n \neq 1$.

Бројеви $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ су елементи верижног разломка.

Верижни разломак кратко ћемо записивати на следећи начин

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Иначе, назив „верижни“ долази од ријечи вериге, а вериге су ланац састављен од већих карика (алки). Вериге су коришћене за вјешање котла за кухање изнад огњишта.

Примјер 1. а) $[2;\,1,5,8] = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{8}}}$, б) $[0;\,2,1,2] = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$,

в) $[0;\,27,12,42] = \cfrac{1}{27+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{42}}}$, г) $[0;\,1,2,1,2] = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$. △

Теорема 1. *Сваки коначни верижни разломак можемо замијенити њему једнаким рационалним бројем.*

Доказ. Нека је дат верижни разломак (1). Ако извршимо назначене операције почињући од краја, добићемо редом:

$a_{n-1}+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{a_{n-1}a_n+1}{a_n}=\dfrac{A_1}{a_n}$, што је, очигледно, рационалан број,

$a_{n-2}+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}=a_{n-2}+\cfrac{1}{\cfrac{A_1}{a_n}}=\dfrac{a_{n-2}A_1+a_n}{A_1}=\dfrac{A_2}{A_1}$, што је рационалан број,

$a_{n-3}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}=a_{n-3}+\cfrac{1}{\cfrac{A_2}{A_1}}=\dfrac{a_{n-3}A_2+A_1}{A_2}=\dfrac{A_3}{A_2}$,

што је рационалан број. Продужавајући поступак добићемо да је верижни разломак (1) једнак рационалном броју $\dfrac{A_{n+1}}{A_n}$. ■

Верижним разломцима у 1. примјеру одговарају рационални бројеви:

а) $[2;\,1,5,8]=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{8}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{41}{8}}}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{8}{41}}=2+\cfrac{1}{\cfrac{49}{41}}=2+\dfrac{41}{49}=\dfrac{139}{49}$,

б) $[0;\,2,1,2]=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3}}=\cfrac{1}{\cfrac{8}{3}}=\dfrac{3}{8}$,

в) $[0;\,27,12,42]=\cfrac{1}{27+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{42}}}=\cfrac{1}{27+\cfrac{1}{\cfrac{505}{42}}}=\cfrac{1}{27+\cfrac{42}{505}}=\cfrac{1}{\cfrac{13677}{505}}=\dfrac{505}{13677}$,

г) $[0;\,1,2,1,2]=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{8}{3}}}=\cfrac{1}{\cfrac{11}{8}}=\dfrac{8}{11}$.

Теорема 2. *Сваки ненегативни рационални број може бити представљен на јединствен начин у облику коначног верижног разломка.*

Доказ. Нека је $\frac{a}{b}$ ненегативан рационалан број. Примјеном Еуклидовог алгоритма налазимо:

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_1, & 0 < r_1 < b,\\
b &= r_1 q_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1,\\
r_1 &= r_2 q_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2,\\
&\cdots & \cdots\\
r_{k-2} &= r_{k-1} q_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1},\\
r_{k-1} &= r_k q_k + r_{k+1}, & r_{k+1} = 0.
\end{aligned}$$

Сваку од ових једнакости запишимо на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}},\\
\frac{b}{r_1} &= q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},\\
\frac{r_1}{r_2} &= q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}},\\
&\cdots\\
\frac{r_{k-2}}{r_{k-1}} &= q_{k-1} + \frac{r_k}{r_{k-1}} = q_{k-1} + \frac{1}{\frac{r_{k-1}}{r_k}},\\
\frac{r_{k-1}}{r_k} &= q_k.
\end{aligned}$$

Сада једноставно налазимо

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}} = \cdots\\
= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots\, q_{k-2} + \cfrac{1}{q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}}}}},
\end{aligned}$$

односно $\dfrac{a}{b} = [q_0;\, q_1, q_2, \dots, q_k]$, што значи да су елементи верижног разломка количници q_0, q_1, q_2, … , q_k који се добијају Еуклидовим алгоритмом.

Докажимо да је представљање једнозначно. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да постоји бар још једно представљање рационалног броја $\dfrac{a}{b}$ у облику верижног разломка. Дакле, нека је

$$\frac{a}{b} = [q_0;\, q_1, q_2, \dots, q_k] \quad \text{и} \quad \frac{a}{b} = [Q_0;\, Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \tag{2}$$

и при томе ова два представљања нису једнака. Међутим, на основу транзитивности је

$$[q_0;\, q_1, q_2, \dots, q_k] = [Q_0;\, Q_1, Q_2, \dots, Q_n].$$

Како је $E(\frac{a}{b}) = q_0$ и $E(\frac{a}{b}) = Q_0$, гдје $E(x)$ означава највећи цијели број који није већи од x, то је, очигледно, $q_0 = Q_0$. Означимо са R_1 и R_2 верижне разломке $[q_1;\, q_2, \dots, q_k]$ и $[Q_1;\, Q_2, \dots, Q_n]$. На исти начин закључујемо да из $E(R_1) = q_1$ и $E(R_2) = Q_1$ имамо да је $q_1 = Q_1$. Ако продужимо расуђивање, добићемо редом: $q_2 = Q_2$, $q_3 = Q_3$, … . Могућа су следећа три случаја: $n = k$, $n < k$ или $n > k$.

Ако је $n = k$, онда је: $q_0 = Q_0$, $q_1 = Q_1$, … , $q_k = Q_k$ и представљања су једнака, што противуријечи претпоставци да су представљања различита.

Ако је $n < k$, онда је: $q_0 = Q_0$, $q_1 = Q_1$, … , $q_{n-1} = Q_{n-1}$ и

$$Q_n = q_n + \cfrac{1}{q_{n+1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_k}}}.$$

Лијева страна последње једнакости је цијели број, па мора бити и десна, а то је могуће само за $k = n$ и $q_k = 1$, што противуријечи дефиницији верижног разломка $q_k \neq 1$.

На потпуно исти начин се разматра трећи случај: $n > k$.

Дакле, није тачна претпоставка да постоје два различита представљања (2) рационалног броја $\dfrac{a}{b}$ у облику верижног разломка. ■

Из последње теореме слиједи поступак представљања рационалног броја $\dfrac{a}{b}$ у облику верижног разломка.

Примјер 2. Рационалне бројеве: а) $\dfrac{59}{11}$, б) $\dfrac{61}{27}$, в) $\dfrac{126}{443}$ представити у облику верижног разломка.

а) $$\frac{59}{11} = 5 + \frac{4}{11} = 5 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{4}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3}{4}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{4}{3}}} = 5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}},$$

$$\frac{59}{11} = [5;\, 2, 1, 3],$$

б) $\frac{61}{27}=2+\frac{7}{27}=2+\cfrac{1}{\cfrac{27}{7}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{6}{7}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{7}{6}}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}$,

$\frac{61}{27}=[2;\,3,1,6]$,

в) $$\frac{126}{443}=\cfrac{1}{\cfrac{443}{126}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{65}{126}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{126}{65}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{61}{65}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{65}{61}}}}=$$

$$=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{61}}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{61}{4}}}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{4}}}}},$$

$\frac{126}{443}=[0;\,3,1,1,15,4]$. $\triangle$

Ако је рационални број $\frac{a}{b}$ негативан, онда одговарајући верижни разломак можемо наћи на два начина. Први начин се састоји у томе да се прво разложи у верижни разломак број $-\frac{a}{b}$, па се, затим, испред добијеног верижног разломка стави знак „$-$“. Тако је, на примјер, $-\frac{61}{27}=-[2;\,3,1,6]$. Други начин се састоји у томе да елемент a_0 верижног разломка $[a_0;\,a_1,a_2,\ldots,a_n]$ буде негативан, а остали елементи a_1, a_2, …, a_n позитивни. На примјер,

$$-\frac{61}{27}=-3+\frac{20}{27}=-3+\cfrac{1}{\cfrac{27}{20}}=-3+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{20}}=-3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{20}{7}}}=-3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{6}{7}}}=$$

$$=-3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{7}{6}}}}=-3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6}}}}=[-3;\,1,2,1,6].$$

Размотримо сада разлагање ирационалних бројева у верижне разломке.

Примјер 3. Разложити $\sqrt{2}$ у верижни разломак.

Из $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x_1}$ налазимо $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x_2}$; даље, из $\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x_2}$ налазимо да је $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, што значи да је $x_2=x_1$, $x_3=x_2$, $x_4=x_3$, …, тј. $\sqrt{2}\sim[1;\,2,2,2,\ldots]$; дакле, ирационалном броју $\sqrt{2}$ одговара бесконачни верижни разломак $[1;\,2,2,2,\ldots]$.

Да ли можемо писати знак „$=$“? Одговор је потврдан, што показује следеће расуђивање.

$$\delta_1 = \frac{P_0}{Q_0} = [q_0] = \frac{q_0}{1} = q_0 = 1 < \sqrt{2},$$
$$\delta_2 = \frac{P_1}{Q_1} = [q_0;\, q_1] = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5 > \sqrt{2},$$
$$\delta_3 = \frac{P_2}{Q_2} = [q_0;\, q_1, q_2] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 + q_2}{q_1 q_2 + 1} = \frac{7}{5} = 1{,}4 < \sqrt{2},$$
$$\delta_4 = \frac{P_3}{Q_3} = [q_0;\, q_1, q_2, q_3] = \cdots = \frac{17}{12} = 1{,}4166\cdots > \sqrt{2},$$
$$\delta_5 = \frac{P_4}{Q_4} = [q_0;\, q_1, q_2, q_3, q_4] = \cdots = \frac{41}{29} = 1{,}41379\cdots < \sqrt{2},$$
$$\delta_6 = \frac{P_5}{Q_5} = [q_0;\, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5] = \cdots = \frac{99}{70} = 1{,}4142857\cdots > \sqrt{2},$$
$$\delta_7 = \frac{P_6}{Q_6} = [q_0;\, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6] = \cdots = \frac{239}{169} = 1{,}4142011\cdots < \sqrt{2},$$

итд. Дакле, имамо

$$\delta_1 < \delta_3 < \delta_5 < \delta_7 < \cdots < \sqrt{2} < \cdots < \delta_6 < \delta_4 < \delta_2,$$

што се може приказати и графички

Примјер 4. Разложити $\sqrt{3}$ у верижни разломак.

Из $\sqrt{3} = 1 + \dfrac{1}{x_1}$ налазимо $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \dfrac{1}{x_2}$; даље, из $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1 = 2 + \dfrac{1}{x_3}$ налазимо $\dfrac{1}{x_3} = \sqrt{3} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = x_1$, итд. На тај начин налазимо да је

$$\sqrt{3} = [1;\, 1, 2, 1, 2, \ldots] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

Примјер 5. Разложити број $\pi = 3{,}1415926\ldots$ у верижни разломак.

Из $\pi = 3{,}1415926\cdots = 3 + \dfrac{1}{x_1}$ налазимо $x_1 = \dfrac{1}{\pi - 3} = \dfrac{1}{0{,}1415926\ldots} = 7 + \dfrac{1}{x_2}$; даље је $\dfrac{1}{x_2} = 0{,}0625159\ldots$ и $x_2 = 15{,}99593\ldots = 15 + \dfrac{1}{x_3}$, $\dfrac{1}{x_3} = 0{,}99593\ldots$ и

$x_3 = 1{,}00408\ldots = 1 + \dfrac{1}{x_4}$, и тако даље. На тај начин добијамо

$$\pi = [3;\, 7, 15, 1, 288, 1, \ldots] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{288 \ddots}}}}$$

У овом случају је

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{P_1}{Q_1} = [q_0] = \frac{q_0}{1} = 3 < \pi,\\
\delta_2 &= \frac{P_2}{Q_2} = [q_0;\, q_1] = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} > \pi,\\
\delta_3 &= \frac{P_3}{Q_3} = [q_0;\, q_1, q_2] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} < \pi,\\
\delta_4 &= \frac{P_4}{Q_4} = [q_0;\, q_1, q_2, q_3] = \cdots = \frac{355}{113} > \pi,
\end{aligned}$$

и тако даље. Сада видимо да је једна од приближних вриједности броја π једнака $\dfrac{22}{7}$. Архимед је користио двије приближне вриједности

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Да ли смо открили тајну Архимедове апроксимације? То не можемо тврдити, али је сигурно да смо показали како се долази до приближних вриједности броја π. Наравно, остаје тајна којим путем је ишао Архимед.

У математици и њеним примјенама веома значајно мјесто има број $e = 2{,}718281828\ldots$ – основа природних логаритама. Интересантан је верижни разломак који одговара том броју:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \ddots}}}}}}$$

Примјер 6. Наћи неколико приближних вриједности броја e користећи одговарајући верижни разломак.

Редом налазимо

$$\underline{e} = 2;$$

$$\overline{e} = 2 + \frac{1}{1} = 3;$$

$$\underline{e} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{8}{3} = 2{,}66\ldots = 2{,}(6);$$

$$\overline{e} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3}}} = \frac{30}{11} = 2{,}7272\ldots = 2{,}(72);$$

$$\underline{e} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4}}}} = \frac{144}{53} = 2{,}71698113\ldots;$$

$$\overline{e} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5}}}}} = \frac{840}{309} = \frac{280}{103} = 2{,}71844660\ldots;$$

$$\underline{e} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6}}}}}} = \frac{5760}{2119} = 2{,}71826333\ldots;$$

и тако даље. Дакле, имамо

$$2 < \frac{8}{3} < \frac{144}{53} < \frac{5760}{2119} < \cdots < e < \cdots < \frac{280}{103} < \frac{30}{11} < 3. \quad \triangle$$

На крају, покажимо једну практичну примјену верижних разломака.

У XVII вијеку К. Хајгенс (1629–1695), познати механичар, физичар и математичар, користио је верижне разломке када је градио у Паризу први планетаријум. За постизање стварне периодичности кретања модела планета потребно је направити зупчанике с великим бројем зубаца. Однос броја зубаца је једнак односу угаоних брзина кретања планета. Претпоставимо да је тај однос $x = \dfrac{938}{727}$, а $(938, 727) = 1$. Израда одговарајућих зупчаника је веома сложена. Међутим, ако посматрамо одговарајући верижни разломак $x = \dfrac{938}{727} = [1; 3, 2, 4, 11, 2]$ и узмемо његову приближну вриједност, на примјер, $x \approx x^* = [1; 3, 2, 4] = \dfrac{40}{31}$, апсолутна грешка апроксимације је $|x - x^*| = |\frac{938}{727} - \frac{40}{31}| = 0{,}0000887\ldots$. Горња граница апсолутне грешке је 0,0001, што је, стварно, занемарљиво. Дакле, зупчанике треба правити с 40 и 31 зупцом умјесто с 938 и 727 зубаца.