**Др Ђорђе Дугошија**

# ТЕОРИЈА ЛИНЕАРНОГ ПРОГРАМИРАЊА

## 1. Увод

Многи економски проблеми могу се математички изразити као проблем налажења минимума (или максимума) линеарне функције

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \qquad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R})$$

на скупу решења неког система линеарних неједначина и једначина:

$$(1) \qquad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i\ , \qquad i = 1, 2, \dots m,$$

$$(2) \qquad d_{j1}x_1 + d_{j2}x_2 + \cdots + d_{jn}x_n = e_j\ , \qquad j = 1, 2, \dots k.$$

Овакав екстремални задатак зове се *проблем линеарног програмирања.*

У случају минимизације проблем линеарног програмирања симболички записујемо као

$$(\mathrm{LP}) \qquad (\min) \quad f \quad \text{при ограничењима} \quad (1)\ , (2).$$

Решења система (1), (2) зову се *допустива решења* проблема. Скуп свих допустивих решења зовемо кратко *допустиви скуп.*

Функција $f$ је *функција циља.* Њен минимум на допустивом скупу, зове се *оптимална вредност проблема.*

У овом раду, користећи резултате из [1], обрадићемо основе теорије дуалности и оптималности линеарног програмирања.

## 2. Теорија дуалности

Раздвајајући неједначине од једначина и посебно истичући ненегативност једног дела промењљивих, сваки проблем линеарног програмирања може да се напише у једном од матричних облика

$$(\mathrm{P}) \qquad \min \quad c_1x_1 + c_2x_2$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\geqslant b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

или, у случају максимизације,

(D) $$\max \quad y_1b_1 + y_2b_2$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} y_1A_{11} + y_2A_{21} &\leqslant c_1 \\ y_1A_{12} + y_2A_{22} &= c_2 \\ y_1 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

За проблеме $(P)$ и $(Q)$ кажемо да су један другоме *дуални*.

Приметимо да сваком ограничењу једног од проблема, осим ограничења које говоре о знаку неке променљиве, одговара променљива његовог дуала. При том дуалне променљиве које одговарају неједначинама су ненегативне, а оне које одговарају једначинама немају знаковно ограничење и обратно. Приметите такође различито усмерење неједнакости за задатке минимизације односно максимизације!

Пример 1. Написати дуал проблема

$$\begin{aligned} \min\ 2x - 3y + z& \\ x + 2y - z &\geqslant 3 \\ \text{п.о.} \qquad -x + 3y + 4z &= 2 \\ x &\geqslant 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Дуал има две променљиве: $a \geqslant 0$ која одговара првој неједнакости и $b$ која одговара једнакости. Функција циља дуала је $3a + 2b$ (скаларни умножак колоне слободних чланова и колоне дуалних променљивих) и треба је максимизовати при ограничењима:

$$\begin{aligned} a - b &\leqslant 2 \\ 2a + 3b &\leqslant -3 \\ -a + 4b &= 1. \end{aligned}$$

Ограничења су добијена скаларним множењем колона уз променљиве $x$, $y$ и $z$ у матрици ограничења полазног проблема са колоном дуалних променљивих и при том су неједнакости уз променљиве које имају знаковно ограничење, а једнакости у супротном. Колону слободних чланова чине коефицијенти уз $x$, $y$ и $z$ у функцији циља. $\triangle$

Наредне теореме показују односе дуалних проблема $(P)$ и $(Q)$.

2.1. Теорема слабе дуалности. *За било које допустиве тачке* $(x_1, x_2)$ *и* $(y_1, y_2)$ *проблема* $(P)$ *односно* $(D)$, *важи*

$$c_1x_1 + c_2x_2 \geqslant y_1b_1 + y_2b_2.$$

*Доказ.* Користећи допустивост датих тачака као и чињеницу да је скаларни производ ненегативних вектора ненегативан, добијамо неједнакости

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 &\geqslant (y_1A_{11} + y_2A_{21})x_1 + (y_1A_{12} + y_2A_{22})x_2 \\ &= y_1(A_{11}x_1 + A_{12}x_2) + y_2(A_{21}x_1 + A_{22}x_2) \\ &\geqslant y_1b_1 + y_2b_2. \end{aligned}$$

Приметимо да је једнакост функција циља $(P)$ и $(D)$ у допустивим тачкама еквивалентна скупу услова:

$$\begin{aligned} (y_1A_{11} + y_2A_{21} - c_1)x_1 &= 0 \\ y_1(A_{11}x_1 + A_{12}x_2 - b_1) &= 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2.2. Теорема јаке дуалности. *Ако један од проблема* $(P)$ *и* $(D)$ *има оптимално решење, онда и други има оптимално решење. При том за произвољна њихова оптимална решења* $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2)$ *и* $(\hat{y}_1,\ \hat{y}_2)$ *важи:*

$$c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 = \hat{y}_1b_1 + \hat{y}_2b_2, \tag{1}$$

$$(\hat{y}_1A_{11} + \hat{y}_2A_{21} - c_1)\hat{x}_1 = 0, \tag{2}$$

$$\hat{y}_1(A_{11}\hat{x}_1 + A_{12}\hat{x}_2 - b_1) = 0. \tag{3}$$

*Доказ.* Претпоставимо да $(P)$ има оптимално решење $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Тада је неједнакост

$$c_1x_1 + c_2x_2 \geqslant c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2$$

последица ограничења проблема $(P)$. На основу Фаркашеве леме (види [1]), постоје $u \geqslant 0$, $v$ и $w \geqslant 0$, такви да је

$$\begin{aligned} c_1 &= uA_{11} + vA_{21} + w \\ c_2 &= aA_{12} + vA_{22} \\ ub_1 + vb_2 &\geqslant c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2. \end{aligned}$$

Из ових услова следи да је $(u, v)$ допустива тачка проблема $(D)$. Због слабе теореме дуалности важи и неједнакост

$$ub_1 + vb_2 \leqslant c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2,$$

па се она претвара у једнакост. Ако је $(y_1, y_2)$ произвољна допустива тачка проблема $(D)$, поновним коришћењем слабе теореме дуалности добијамо

$$ub_1 + vb_2 = c_1\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 \geqslant y_1b_1 + y_2b_2.$$

Дакле, $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) = (u, v)$ је оптимално решење за $(D)$ и важи (1). Релације (2) и (3), тзв. *услови комплементарности*, следе из примедбе изнете при доказу слабе теореме дуалности.

У случају да $(D)$ има оптимално решење, тврђење се доказује аналогно. Доказ препуштамо читаоцу. ■

## 3. Теорија оптималности

Користећи појам дуалности, могуће је окарактерисати оптимално решење проблема линеарног програмирања.

3.1. Неопходни и довољни услови оптималности. *Допустива тачка $(p,q)$ проблема $(P)$ је његово оптимално решење ако и само ако постоји тачка $(u,v)$ допустива за $(D)$, таква да су задовољени услови комплементарности*

$$u(A_{11}p + A_{12}q - b_1) = 0 \tag{4}$$

$$(uA_{11} + vA_{21} - c_1)p = 0. \tag{5}$$

*Допустива тачка $(u,v)$ проблема $(D)$ је његово оптимално решење, ако и само ако постоји тачка $(p,q)$ допустива за $(P)$, таква да су задовољени услови комплементарности* (4) *и* (5).

*Доказ.* Доказаћемо само први део теореме. Неопходни услови следе из јаке теореме дуалности. Да су услови довољни следи из слабе теореме дуалности, јер за произвољну допустиву тачку $(x_1, x_2)$ проблема $(P)$ важи

$$c_1x_1 + c_2x_2 \geqslant ub_1 + vb_2 = c_1p + c_2q. \quad ■$$

Пример 2. Да ли је $(p,q,r) = (2,0,1)$ оптимално решење проблема $(P)$:

$$\min \quad 10x + 5y + 4z$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 3z &\geqslant 3 \\ 4x + 2z &\geqslant 10 \\ x,\ y,\ z &\geqslant 0\ ? \end{aligned}$$

Тачка $(p,q,r)$ је допустива за $(P)$. Дуални проблем је $(D)$:

$$\min \quad 3u + 10v$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} 3u + 4v &\leqslant 10 \\ 2u &\leqslant 5 \\ -3u + 2v &\leqslant 4 \\ u,\ v, &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Покушајмо да нађемо допустиву тачку $(u, v)$ дуала која са $(p, q, r)$ задовољава услове комплементарности:

$$\begin{aligned} (3p + 2q - 3r - 3)u &= 0 \\ (4p + 2r - 10)v &= 0 \\ p(3u + 4v - 10) &= 0 \\ q(2u - 5) &= 0 \\ r(-3u + 2v) &= 0. \end{aligned}$$

Прве две и четврта релација су задовољене. Из треће и пете релације следе услови

$$\begin{aligned} 3u + 4v &= 10 \\ -3u + 2v &= 4. \end{aligned}$$

Решење овог система $u = 2$ и $v = 2/9$ јесте тачка допустива за $(D)$. Стога је $(p, q, r)$ оптимално решење за $(P)$. $\triangle$

Питање постојања оптималних решења проблема $(P)$ и $(D)$ решава

3.2. Теорема егзистенције. *Ако проблеми $(P)$ и $(D)$ имају допустивих тачака, онда оба имају оптимална решења.*

*Доказ.* Означимо са $X$ односно $Y$ скупове допустивих тачака за $(P)$ односно $(D)$. Због слабе теореме дуалности, скуп $\{c_1x_1 + c_2x_2 \mid x \in X\}$ је ограничен са доње стране (вредношћу функције циља проблема $(D)$ у његовој произвољној допустивој тачки), те има коначан инфимум $m$. Претпоставимо да се $m$ на скупу $X$ не достиже. Тада систем

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\geqslant b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \\ x_1 &\geqslant 0 \\ -c_1x_1 - c_2x_2 &\geqslant -m \end{aligned}$$

нема решења, па, према теореми о систему који нема решења (види [1]), постоје $u \geqslant 0$, $v$, $w \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ такви да је

$$\begin{aligned} uA_{11} + vA_{21} + w - tc_1 &= 0 \\ uA_{12} + vA_{22} - tc_2 &= 0 \\ ub_1 + vb_2 - tm &> 0. \end{aligned}$$

Уколико би било $t = 0$, према теореми о систему који нема решења, било би $X = \emptyset$, што је искључено. Отуда је $t > 0$. Ако дефинишемо $y_1 = \dfrac{u}{t}$, $\quad y_2 = \dfrac{v}{t}$, из добијених релација (деобом са $t$) налазимо да је $(y_1, y_2)$ допустива тачка проблема $(D)$ за коју важи $y_1b_1 + y_2b_2 > m$. Како је, због слабе теореме дуалности, $m \geqslant y_1b_1 + y_2b_2$, добили бисмо контрадикцију $m > m$. Стога проблем $(P)$ има оптимално решење. На основу јаке теореме дуалности, онда и $(D)$ има оптимално решење. ■

Приметите да смо, доказујући теорему егзистенције успут доказали, да *одоздо ограничена линеарна функција на непразном скупу решења система линеарних неједначина, достиже на њему свој минимум.*

## 4. Неке примене

4.1. Основна теорема матричних игара фон Нојмана. Нека је $A = (a_{ij})$ произвољна реална матрица формата $m \times n$. Посматрајмо проблеме

$$\max u$$

(1)

$$\text{п.о.} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geqslant u, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

односно

$$\min v$$

(2)

$$\text{п.о} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leqslant v, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \ y_j \geqslant 0, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Приметимо да су, сагласно дефиницији, проблеми (1) и (2) један другом дуални. Допустиви скуп проблема (1) је непразан компакт (једно допустиво решење чини $x_1 = 1$, $x_i = 0$, $i = 2, \ldots, m$ и $u$ једнако најмањем елементу матрице $A$). Стога (1) има оптимално решење. Према јакој теореми дуалности и његов дуал (2) има оптимално решење и оптималне вредности су им једнаке.

Означимо са $w$ заједничку оптималну вредност, а са $(\hat{x}, w)$ и $(\hat{y}, w)$ оптимална решења (1) односно (2).

Посматрајмо следећу конфликтну ситуацију (игру) у којој учествују два играча I и II. Обојици је позната матрица $A$. Први играч бира врсту $i$ матрице $A$ са вероватноћом $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Други играч, не знајући шта је први изабрао, бира колону $j$ матрице $A$ са вероватноћом $y_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. После тога први играч добија од другог играча износ $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j$. Циљ првог играча је да добије што више, а другог да тај износ буде што мањи. Из ограничења проблема (1) и (2) следи:

Ако први играч бира расподелу вероватноће $\hat{x}$, он гарантује добитак $w$, без обзира на избор другог играча! Ако други играч бира расподелу вероватноћа $\hat{y}$, он гарантује да добитак првог неће бити већи од $w$, без обзира шта први играо. Отуда следи да су $\hat{x}$ и $\hat{y}$ најбољи начини играња играча (*оптималне стратегије*) и да је $w$ резултат таквог играња (*вредност игре*).

Добили смо основну теорему матричних игара:

Теорема фон Нојмана. *У свакој матричној игри, постоје оптималне стратегије за оба играча као и вредност игре.*

Да би се игра решила, довољно је решити један од полазних линеарних проблема. Због услова комплементарности, важи

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{x}_i a_{ij} - w\right)\hat{y}_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

и

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{y}_j - w\right)\hat{x}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Одавде, знајући оптималну стратегију једног играча, можемо израчунати оптималну стратегију другог играча.

Предлажемо читаоцу да као вежбу реши проблеме:

**1.** Решити проблем $(P)$:

$$\min \qquad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 &\geqslant 4\\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &\geqslant 3\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

решавајући најпре његов дуал графичким путем.

**2.** У зависности од реалних параметара $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, решити проблем

$$\min \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

при ограничењима

$$\begin{aligned} x_1 &\geqslant b_1\\ x_1 + x_2 &\geqslant b_2\\ &\cdots\\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\geqslant b_n \end{aligned}$$

*Упутство*: Решити прво дуални проблем.

**3.** Решити матричну игру:

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3\\ 0 & 2 & -1. \end{matrix}$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ђ. Дугошија, *Фурије-Моцкинов метод*, Настава математике XLV, 1–2 (2000), 42–47.

[2] G. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press 1963.

[3] V. Chvatal, *Linear Programming*, Freeman and Company, New York 1983.