НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2001, XLVI, 1–2, стр. 1–22

др Милојица Јаћимовић, др Жана Ковијанић

БОРСУКОВА ХИПОТЕЗА: МАТЕМАТИЧКИ ПРОБЛЕМ ИЛИ ЗАДАТАК НА МАТЕМАТИЧКОЈ ОЛИМПИЈАДИ

Говорећи о разлици између задатка на математичкој олимпијади и математичког проблема чије се рјешење може сматрати математичким открићем, руски математичар Делоне је казао да је разлика у томе што за рјешавање олимпијског задатка треба пет часова а да би се постигло значајно математички откриће потребно је 5000 часова. Хипотеза

У d-димензионалном простору сваки скуп позитивног дијаметра може се подијелити на $d+1$ скупова мањег дијаметра,

коју је 1933. године у свом раду „Три теореме о n-димензионалној еуклидовој сфери", објављеном у часопису Fundamenta Mathematica, формулисао пољски математичар Карол Борсук, 65 година касније, дакле 1998. године, формулисана је као задатак на једном математчком такмичењу. У том тренутку проблем тачности Борсукове хипотезе већ је био ријешен. Хипотезу су 1993. године оповргли израелски математичари Ј. Кан и Г. Калаи. Наравно, тек послије њиховог рјешења Борсуковог проблема, постало је могуће формулисати тај проблем као такмичарски задатак, али и тада само на једном специфичном такмичењу какво је Љетња конференција Турнира градова. Занимљиво је да је тада, дакле на такмичењу ученика средњих школа, ријешен и један број отворених питања у вези са Борсуковом хипотезом. Додатак овом раду садржи кратак опис организације Љетње конференције Турнира градова и задатак који се односи на Борсукову хипотезу, у форми у којој је он био дат на самом такмичењу.

1. О рјешавању Борсуковог проблема

Ако скуп $A \subseteq \mathbf{R}^2$ који се састоји од три тјемена правилног троугла странице један подијелимо на два скупа, тада бар један од њих садржи два тјемена троугла, па је дијаметар бар једног од њих $\leqslant 1$. Слично, у простору $\mathbf{R}^d$ постоји $d+1$ тачака таквих да су сваке двије од њих на растојању 1. Рецимо, ако је $a=\sqrt{2}/2$, тада се тачке $a_1=(a,0,\dots,0)$, $a_2=(0,a,0,\dots,0)$, $\dots$, $a_d=(0,0,\dots,0,a)$ налазе на растојању 1 једна од друге. Нека је $a_0=(x,x,\dots,x)\in\mathbf{R}^d$, гдје је x било које рјешење квадратне једначине $nx^2-2ax+a^2-1=0$. Тада је растојање тачке a_0 до сваке од тачака $a_1,\dots,a_d$ једнако 1, па је скуп $A=\{a_0,\dots,a_d\}\subseteq\mathbf{R}^d$ правилни јединични симплекс у $\mathbf{R}^d$. Ако овај скуп подијелимо на d дјелова, тада ће бар један од њих садржати два тјемена симплекса; дијаметар тог дијела ће бити једнак 1. Дакле, број дјелова мањег дијаметра на које се може подијелити сваки скуп у $\mathbf{R}^d$ није мањи од $d+1$.

Погледајмо на чему је могло бити засновано Борсуково увјерење о тачности хипотезе и како су изгледали покушаји да се она докаже.

Теорема 1. *Борсукова хипотеза је тачна за* $d = 2$.

Овај релативно једноставни закључак био је познат Борсуку. Поред тога, Борсук је знао да се сфера у $\mathbf{R}^d$ може подијелити на $d+1$ скупова мањег дијаметра.

Доказ. На почетку доказа подсјетимо да је дијаметар скупа $A \subseteq \mathbf{R}^d$ супремум растојанаја тачака тог скупа:

$$\operatorname{diam} A := \sup\{\, \|x-y\| : x, y \in A\,\}.$$

Нека је $M \subseteq \mathbf{R}^2$ скуп дијаметра $D > 0$. Конструишимо хоризонталну праву l_1 такву да изнад ње нема тачака скупа M (в. слику 1), и да изнад сваке хоризонталне праве l која лежи испод праве l_1 постоји бар једна тачка скупа M. Испод праве l_1, на растојању D, конструишимо праву l_2 паралелену са l_1. Тако је скуп M смјештен у траку P_1 ширине D. Конструишимо још двије такве траке под углом од $60°$ са траком P_1. На тај начин скуп M се смјешта у шестоугао S са страницама чије су дужине редом a, b, a, b, a, b. Претпоставимо да је $a \leqslant b$. Симетрале страница дужине b сјеку се у једној тачки – центру тог шестоугла. Оне дијеле шестоугао на три дијела дијаметра мањег од D. ■

Сл. 1

Сл. 2

Напомена. Да је у почетку права l_1 конструисана тако да са x-осом захвата угао $\alpha \neq 0$, тада бисмо добили други шестоугао, са угловима од $120°$ и страницама $a_\alpha, b_\alpha, a_\alpha, b_\alpha, a_\alpha, b_\alpha$. Разлика $f(\alpha) = b_\alpha - a_\alpha$ је непрекидна функција угла α, при чему је $f(180°) = -f(0)$. Слиједи да постоји угао α_0 такав да је $f(\alpha_0) = 0$. За такав угао добија се правилни шетоугао који садржи скуп M.

Странице тог шестоугла, означимо га са $ABCPQR$, једнаке су $D\sqrt{3}/3$ (в. слику 2). Из центра O тог шестоугла конструишимо нормале на странице AB, CP и QR. Оне дијеле шестоугао $ABCPQR$ на три дијела, сваки од њих је дијаметра

$D\sqrt{3}/2$ (в. слику 2), па је и скуп M подијељен на три дијела, а дијаметар сваког од њих је $\leqslant D\sqrt{3}/2$. Дакле,

сваки равански скуп дијаметра D може се подијелити на три дијела дијаметра $\leqslant D\sqrt{3}/2$.

Занимљиво је да се горња оцјена не може побољшати. Наиме, ако је M круг дијаметра D подијељен на три дијела, тада је (в. [8]) дијаметар бар једног од њих $\geqslant D\sqrt{3}/2$.

Ако са $\delta_k = \delta_k(n)$ означимо најмањи реални број за који се скуп $M \subseteq \mathbf{R}^k$ дијаметра D може подијелити на n дјелова дијаметра $\leqslant D\delta_k$, тада се претходни закључак може записати у облику

$$\delta_2(3) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Њемачки математичар Г. Ленц је 1956. године (в. [8]) доказао да је

$$\delta_2(4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{и} \quad \delta_2(7) = \frac{1}{2},$$

при чему се горње једнакости достижу на кругу. У [8], уз задатке 101–104, може се наћи низ занимљивих коментара и питања о својствима бројева $\delta_k(n)$, од којих су нека и данас отворена.

За формулацију сљедећег резултата потребно је увести неколико нових појмова.

Прво, напоменимо да ћемо за векторе $x = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbf{R}^d$ и $y = (y^1, \ldots, y^d) \in \mathbf{R}^d$ скаларни производ $x^1y^1 + x^2y^2 + \cdots + x^dy^d$ означавати са $\langle x, y\rangle$.

Ако је вектор $c \in \mathbf{R}^d$ различит од нуле а α реални број, тада се за скуп

$$\{\, x \in \mathbf{R}^d : \langle c, x\rangle = \alpha \,\}$$

каже да је *хиперраван у простору* $\mathbf{R}^d$. Специјално, ако је $x_0 \in R^d$, тада је

$$H = \{\, x \in \mathbf{R}^d : \langle c, x - x_0\rangle = 0 \,\}$$

хиперраван која пролази кроз тачку x_0. Тада се за скупове

$$H^- = \{\, x \in \mathbf{R}^d : \langle c, x - x_0\rangle \leqslant 0 \,\} \quad \text{и} \quad H^+ = \{\, x \in \mathbf{R}^d : \langle c, x - x_0\rangle \geqslant 0 \,\}$$

каже да су *(затворени) полупростори које одређује хиперраван* H.

Ако је $r > 0$, тада скуп

$$\{\, x = (x^1, x^2, \ldots, x^d) : (x^1 - x_0^1)^2 + \cdots + (x^d - x_0^d)^2 \leqslant r^2 \,\}$$

називамо *кугла (лопта) у* $\mathbf{R}^d$ *са центром у тачки* x_0 *и полупречником* r.

Тачка $x_0 \in \mathbf{R}^d$ је *гранична тачка скупа* A ако свака кугла са центром у тачки x_0 има непразан пресјек и са скупом A и са његовим комплементом.

Ако је $H \subseteq \mathbf{R}^d$ хиперраван која садржи бар једну граничну тачку скупа $A \subseteq \mathbf{R}^d$, таква да $A \subseteq H^+$ или $A \subseteq H^-$, тада се каже да је H *хиперaван ослонца скупа* A.

Посебно истичемо сљедећу дефиницију.

За $A \subseteq \mathbf{R}^d$ *се каже да је глатки скуп ако за сваку граничну тачку* x_0 *скупа* A *постоји тачно једна хиперраван ослонца скупа* A *која садржи тачку* x_0.

Теорема. (Г. Хадвигер) *Борсукова хипотеза је тачна за сваки глатки конвексни скуп* V *у* $\mathbf{R}^d$.

Хадвигер је овај резултат доказао 1946. године, коршћењем Борсук-Уламове теореме о непрекидним функцијама и антиподним тачкама сфере (в. [1]). Ми ћемо изложити доказ Хадвигерове теореме за $d = 3$ који припада Бранку Гринбауму.

Доказ Хадвигерове теореме за $d = 3$. Прво опишимо једну подјелу (затворене) лопте U чији је пречник једнак дијаметру D скупа V на четири дијела мањег дијаметра. У лопту упишимо правилни тетраедар $PQRS$ са центром у тачки O. Тада углови $OQRS, OPRS, OPQS, OPQR$ (в. слику 3), под којима се из центра виде стране тетраедра дијеле лопту на четири дијела. Означимо те дјелове са U_1, U_2, U_3 и U_4. Пошто ниједан од тих дјелова не садржи дијаметрално супротне тачке лопте U, то је дијаметар сваког од њих мањи од D.

Сл. 3

Није тешко прецизно израчунати да је дијаметар сваког од њих једнак

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}} \cdot D \approx 0.888D.$$

Претпоставимо да је $V \subseteq \mathbf{R}^3$ глатко тијело дијаметра D. Посматрајмо пресликавање које свакој граничној тачки A скупа V придружује граничну тачку $A' = u(A)$ лопте U, такву да је раван ослонца скупа V паралелена са тангентном равни на U у тачки u; при томе се тачка A' бира тако да V и U леже са исте стране поменутих равни. Скуп V подијелимо на четири скупа V_1, V_2, V_3, V_4, тако да тачка v припада скупу V_j ако тачка $A' = u(A)$ припада скупу U_j. Докажимо да је дијаметар сваког од дјелова V_i мањи од дијаметра скупа V.

Допустимо да је за неко $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ дијаметар скупа V_j једнак D. Нека су A и B двије граничне тачке скупа V_j, такве да је $|AB| = D$. Кроз A и B поставимо двије равни нормалне на AB. Пошто су оне паралелне и удаљене један од друге за D, то скуп V лежи између њих. Због тога су то равни ослонца скупа V. То значи да су њима паралелне тангентне равни на лопту U у тачкама $u(A)$ и $u(B)$ дијаметрално супротне. Слиједи да је растојање тачака $u(A)$ и $u(B)$ једнако D, иако ове тачке припадају неком од скупова U_j чији је дијаметар мањи од D.

Нека је сада C унутрашња тачка скупа V. Унију свих дужи CX, гдје X припада V_j означимо са са W_j, $1 \leqslant j \leqslant 4$. Јасно је да је дијаметар скупа W_j мањи од D. Унија конуса свих W_j је скуп V, па они чине подјелу скупа V на 4 дијела дијаметра мањег од D.

Тиме је доказано да је тврђење тачно за $d = 3$. Доказ за простор димензије $d > 3$ изводи се на сличан начин. У лопту $U \subseteq \mathbf{R}^d$ уписује се правилан d-димензионални симплекс S, са центром који се поклапа са центром лопте O. Углови под којима се из тачке O виде $d-1$ димензионалне стране симплекса дијеле лопту на $U_1, \ldots, U_d, U_{d+1}$. Ниједан од ових дјелова не садржи тачке које су дијаметрално супротне, па је дијаметар сваког од њих мањи од D. У сљедећој етапи доказа конструишу се хиперравни ослонца у граничним тачкама A скупа V и њима паралелне тангентне хипперравни у тачкама $A' = u(A)$ скупа U. Постављајући $A \in V_j$ ако и само ако $u(A) \in U_j$, $j = 1, 2, \ldots, d+1$, добијамо подјелу скупа V на скупове V_j дијаметра мањег од D. ∎

Посљедица 1. *Борсукова хипотеза је тачна за свако централносиметрично тијело.*

Доказ. Свако централносиметрично тијело V лежи у лопти истог дијаметра, па тврђење слиједи на основу конструкције из доказа претходне теореме. ∎

Занимљив је и сљедећи резултат о Борсуковој хипотези.

Теорема 3. *Ако је Борсукова хипотеза тачна за сваки конвексни скуп у* $\mathbf{R}^d$ *тада је она тачна за сваки скуп у* $\mathbf{R}^d$.

Доказ. Претпоставимо да је Борсукова хипотеза тачна за сваки конвексни скуп $A \subseteq \mathbf{R}^d$. Нека скуп $M \subseteq \mathbf{R}^d$ није конвексан. Доказаћемо да тада конвексни омотач скупа M (то је најмањи конвексан скуп који садржи скуп M, означимо га са $\operatorname{conv}(M)$) има исти дијаметар као и скуп M. У противном би постојале двије тачке $A, B \in \operatorname{conv} M$, такве да је растојање међу њима веће од дијаметра скупа M. Конструишимо двије хиперравни нормалне на дуж AB на растојању које није веће од дијаметра скупа M, такве да скуп X који се састоји од тачака које се налазе између те двије хиперравни (укључујући и тачке тих хиперравни), садржи M. Скуп X је конвексан, па садржи скуп $\operatorname{conv} M$. Слиједи да дијаметар овог скупа није већи од дијаметра скупа M, па ни дијаметар скупа $\operatorname{conv} M$ не може бити већи од дијаметра скупа M. Одавде даље слиједи тврђење теореме: довољно је доказати да је Борсукова хипотеза тачна за конвексне скупове. ∎

Без доказа, уз само неколико напомена, наводимо сљедећу теорему.

Теорема 4. *Борсукова хипотеза је тачна за* $d = 3$.

Х. Енглстон 1955. године, Б. Гринбаум и А. Хепеш 1957. године, дакле више од двадесет година пошто је хипотеза формулисана, доказали су њену тачност за $d = 3$ (в. [8]). Исто тврђење за коначне скупове у $\mathbf{R}^3$ доказали су 1956. године мађарски математичари А. Хепеш и П. Ревес (в. [8]).

2. Контрапримјери за Борсукову хипотезу

Први контрапримјер за Борсукову хипотезу конструисали су, како је већ речено, Ј. Кан и Г. Калаи. Прецизно, ако се са $f(d)$ означи најмањи природни број такав да се сваки скуп $M \subseteq \mathbf{R}^d$ може разбити на $f(d)$ дјелова, онда су Кан и Калаи доказали да за довољно велико d важи неједнакост $f(d) \geqslant (1.1)^{\sqrt{d}}$. Одавде слиједи да је за довољно велико d, $f(d) > d+1$. Њихова конструкција је слиједила неке идеје Болтјанског, Ердеша и Лармана и ослањала се на у комбинаторици добро познату теорему Френкла-Вилсона (в. [7]). Израелски математичар А. Нили је нашао једну простију конструкцију контрапримјера и доказао да је Борсукова хипотеза нетачна у простору димензије $d = 946$. Модификујући Нилијев доказ, руски математичар А. Рајгородски и њемачки математичар Бернулф Вајлсбах су доказали да је та хипотеза нетачна за $d = 561$. Овдје ћемо, слиједећи [1], изложити једну комбинацају ових конструкција.

Прије него што пређемо на саму конструкцију, напоменимо да ћемо са $|S|$ означавати број елемената скупа S. Иначе, контрапримјер ће бити подскуп скупа $K = \{-1,1\}^d$ тјемена коцке у d-димензионалном простору. Број d ће, наравно, бити накнадно прецизно одређен. С обзиром на тврђења теорема 1 и 2, он ће бити већи од три. У конструкцији коју ћемо презентирати, број d ће бити облика $(2p-1)(4p-3)$, гдје је p неки природан број.

Лема 1. *Нека је p непаран прост број, $n = 4p-2$. Ако је*

$$Q = \{\, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \{-1,1\}^n : x_1 = 1, \Pi_{i=1}^n x_i = 1 \,\}$$

и $Q' \subseteq Q$ било који подскуп скупа Q у коме не постоје два вектора x и y таква да је $|\langle x,y\rangle| = 2$, тада скуп Q има тачно 2^{n-2} вектора а за број вектора скупа Q' важи оцјена:

$$|Q'| \leqslant \sum_{i=0}^{p-2} C_n^i.$$

Доказ. Први дио тврђења (да скуп Q има 2^{n-2} тачака) скоро је очигледан. Прво, n-торки облика $\{x = (1, x_2, \cdots, x_n) \in \{-1,1\}^n\}$ има колико и варијација са понављањем $n-1$-ве класе скупа $-1, 1$, а тај број је једнак 2^{n-1}. Како је $n-1$ паран број, то се свака варијација са парним бројем појављивања броја -1, простом промјеном знака преводи у варијацију са непарним бројем појављивања -1; дакле укупан број елемената скупа Q једнак је 2^{n-2}.

Доказ другог дијела тврђења леме 1 изводимо у неколико етапа.

(а) Докажимо да *ако вектори $x, y \in Q'$ задовољавају услов $\langle x,y\rangle = \pm 2 \pmod p$, тада је $x = y$.*

Претпоставимо да је $x \neq y$. Тада, због $x, y \in \{-1,1\}^{4p-2}$, узимајући у обзир да су прве координате вектора x и y једнаке 1, имамо да је $-(4p-4) \leqslant \langle x,y\rangle \leqslant 4p-4$. Вектори x и y имају паран број координата које су једнаке -1, па је број координата на којима се ова два вектора разликују, означимо га са m, такође паран. Слиједи да је

$$(\forall x, y \in Q)\, \langle x,y\rangle = 4p-2-2m = 2 \pmod 4.$$

Ако је $\langle x,y\rangle = 2 \pmod p$, тада је (в. претходну једнакост) $\langle x,y\rangle - 2$ односно $\langle x,y\rangle + 2$ дјељиво са четири и са p, па је облика $4p\cdot k$. То значи да x и y не могу бити различити вектори скупа Q'.

(б) За свако $y \in Q'$ посматрајмо полином F_y од n промјенљивих, $x_1, \ldots, x_n$, дефинисан формулом

$$\begin{aligned} F_y(x) = F_y(x_1, \ldots, x_n) &= \Pi_{i=0, i\neq 2, i\neq p-2}^{p-1}(\langle y,x\rangle - i) \\ &= (\langle y,x\rangle)(\langle y,x\rangle - 1)(\langle y,x\rangle - 3)\cdots(\langle y,x\rangle - (p-3))(\langle y,x\rangle - (p-1)). \end{aligned}$$

Степен овог полинома је $p-2$.

Докажимо да *за* $x = y$ *број* $F_y(x)$ *није дјељив са* p. Заиста, тада је

$$\langle y, x\rangle = \langle x, x\rangle = n = -2 \pmod p,$$

па ниједан од фактора $\langle y, x\rangle - i$ у дефиницији полинома $F_y(x)$ није дјељив са p. Слиједи да ни $F_y(x)$ није дјељив са p.

Нека су x и y различити вектори из Q'. Тада је (в. (а)) $\langle y, x\rangle \neq \pm 2 \pmod p$, па је

$$\langle y, x\rangle = i \pmod p \quad \text{за неко} \quad i \in \{0, 1, 3, \dots, p-3, p-1\}.$$

Одавде слиједи да је, *за* $x, y \in Q', x \neq y$ *број* $F_y(x)$ *дјељив са* p.

Даље примијетимо да због $x \in \{-1, 1\}^n$, слиједи да се, у развоју полинома $F_y(x)$, x_i^2 сваки пут може замијенити са 1. Тако се добија нови полином степена $\leqslant p-2$. Његови сабирци су облика $x_1 \cdots x_{i_k}$, гдје су $i_1, \dots, i_k$ у паровима различити индекси из скупа $\{1, \dots, n\}$. Означимо тај полином са $G_y(x)$.

(в) Претпоставимо да је $\sum_{y \in Q'} \alpha_y G_y(x) = 0$, при чему су α_y рационални коефицијенти који нијесу сви једнаки нули. Може се претпоставити да су сви коефицијенти α_y цијели бројеви и да нијесу сви дјељиви са p. Међутим, тада за свако $y \in Q'$, постављајући $x = y$, добијамо да је

$$\alpha_y G_y(y) + \sum_{z \neq y} \alpha_z G_y(y) = 0,$$

одакле, с обзиром на (б), слиједи да је $\alpha_y G_y(y)$ дјељиво са p. Како $G_y(y)$ није дјељиво са p, то је α_y дјељиво са p. То је супротно са претпоставком, што значи да је *скуп полинома* $\{G_y : y \in Q'\}$ *линеарно независан над пољем рационалних бројева*, односно да *међу полиномима* G_y *не постоји линеарна веза са рационалним коефицијентима.*

(г) Јасно је да број елемената скупа Q' није већи од броја полинома G_y степена $p-2$ од n промјењљивих, у којима су промјењљиве степена не већег од 1. Полиноми G_y су линерано независни, па их не може бити више него што има полинома облика $x_{i_1} \cdots x_{ik}$, гдје су $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ у паровима различити индекси. Оваквих полинома има $1 + n + C_n^2 + \cdots + C_n^{p-2}$, па је $|Q'| \leqslant \sum_{i=0}^{p-2} C_n^i$. Тиме је лема доказана. ■

Лема 2. *Нека је* $R = \{\, xx^T : x \in Q \,\} \subseteq \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *и* $R' \subseteq R$ *подскуп скупа* R *који се састоји од матрица, схваћених као вектора у* $\mathbf{R}^{n^2}$ *таквих да у њему не постоје два вектора чији је скаларни производ* $\leqslant 4$. *Тада је* $|R'| \leqslant \sum_{i=0}^{p-2} C_n^i$.

Доказ. Примијетимо да скуп R чине метрице реда $n \times n$. Како је прва компонента сваког $x \in Q$ једнака 1, то је прва колона матрице xx^T једнака x. Дакле, за различите $x \in Q$ добијају се различите матрице $M(x) = xx^T \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. То значи да је R скуп који се састоји од (в. Лему 1) $|Q| = 2^{n-2}$ квадратних матрица реда n и ранга 1.

Ако се матрица xx^T схвати као вектор из $\mathbf{R}^{n^2}$, са координатама $x_i x_j$, тада је

$$\langle M(x), M(y)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j (y_i y_j) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big) = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\Big) = \langle x, y\rangle^2.$$

Како је $\langle x,y\rangle = 2 \pmod 4$ за свако $x,y\in Q$, то је

$$(\forall x,y\in Q)\ \langle M(x),M(y)\rangle \geqslant 4.$$

Ова вриједност је најмања ако је $\langle x,y\rangle=\pm 2$, што значи да је (в. лему 1)

$$|R'| = |Q'| \leqslant \sum_{i=0}^{p-2} C_n^i. \quad \blacksquare$$

За сваки вектор $x\in Q$ матрици $M(x)=xx^T$ придруживали смо вектор из $\mathbf{R}^{n^2}$ чије су координате елементи матрице $M(x)$. Скуп свих таквих вектора (када $x\in Q$) означили смо са R. Са S означимо скуп вектора чије су компоненте изнад главне дијагонале матрице xx^T. Тада важи сљедеће тврђење.

Лема 3. *Нека је* $S=\{(xx^T)_{i>j} : xx^T\in R\}\subseteq \mathbf{R}^d$, *гдје је* $d=C_n^2=(2p-1)(4p-3)$. *Тада је* $|S|=2^{n-2}$ *а максимално растојање међу тачкама скупа* S *достиже се на векторима* $x,y\in Q$ *за које је* $\langle x,y\rangle=\pm 2$. *Поред тога, ако је* $S'\subseteq S$ *скуп чији је дијаметар мањи од дијаметра скупа* S, *тада је*

$$|S'| \leqslant \sum_{i=0}^{p-2} C_n^i.$$

Доказ. Нека је $U(x)\in\{-1,1\}^d$ скуп свих поддијагоналних елемената матрице $M(x)$. Пошто је $M(x)$ симетрична матрица са елементима на дијагонали који су једнаки 1, то из $M(x)\neq M(y)$ слиједи $U(x)\neq U(y)$. Одавде слиједи да је $|S|=|R|=2^{n-2}$. Даље је

$$4\leqslant \langle M(x),M(y)\rangle = 2\langle U(x),U(y)\rangle + n,$$

па је $\langle U(x),U(y)\rangle \geqslant -\dfrac{n}{4}+1$, при чему се једнакост достиже ако и само ако су вектори $x,y\in Q$ такви да је $|\langle x,y\rangle|=2$. Пошто је $\|U(x)\|=\|U(y)\|=\sqrt{C_n^2}$, за било која два вектора $x,y\in Q$, то је растојање између $U(x)$ и $U(y)$ највеће када је $|\langle x,y\rangle|=2$. Одавде слиједи да подскуп скупа S чији је дијаметар мањи од дијаметра скупа S не може имати више од $|Q'|\leqslant\sum_{i=0}^{p-2}C_n^i$ елемената. $\blacksquare$

Лема 4. *Ако је p прост број већи од 2, $n=4p-2$, $d=C_n^2=(2p-1)(4p-3)$ и*

$$Q=\{\,x=(x_1,\cdots,x_n)\in\{-1,1\}^n : x_1=1, \Pi_{i=1}^n x_i = 1\,\},$$

тада свако разбијање скупа $S=\{(xx^T)_{i>j} : x\in Q\}\subseteq\mathbf{R}^d$ *на скупове мањег дијаметра садржи више од*

$$\frac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{p-2}C_n^i} > \frac{e}{64p^2}\left(\frac{27}{16}\right)^p$$

дјелова.

Доказ. Из оцјена

$$n! > e\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{и} \quad n! < en\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

добијамо:

$$\sum_{i=0}^{p-2} C_n^i < pC_{4p}^p = p\frac{(4p)!}{p!(3p)!} < p\frac{e(4p)(4p/e)^{4p}}{e(p/e)^p e(3p/e)^{3p}} = \frac{4p^2}{e}\left(\frac{256}{27}\right)^p.$$

Одавде слиједи да је

$$\frac{2^{n-2}}{\sum_{i=0}^{p-2} C_n^i} = \frac{2^{4p-4}}{\sum_{i=0}^{p-2} C_{4p-2}^i} > 2^{4p-2}\frac{e}{4p^2}\left(\frac{27}{256}\right)^p > \frac{e}{64p^2}\left(\frac{27}{16}\right)^p. \quad \blacksquare$$

Сада се може формулисати и доказати теорема о нетачности Борсукове хипотезе.

Теорема 1. *У простору $\mathbf{R}^{861}$ постоји скуп који се не може подијелити на 862 скупа мањег дијаметра.*

Доказ. Примијенимо лему 4, постављајући $p = 11$. Тада је $n = 42$, $d = 21 \cdot 41 = 861$, па у простору $\mathbf{R}^{861}$ постоји $S \subseteq \{-1, 1\}^d$ чије свако разбијање на скупове мањег дијаметра садржи више од

$$\frac{2^{40}}{\sum_{i=0}^{9} C_{42}^i}$$

дијелова. Како је $\sum_{i=0}^{9} C_{42}^i = 597121227$ и $2^{40} = 1099511627776$, то свако разбијање скупа S на скупове мањег дијаметра мора садржати више од

$$1099511627776 : 597121227 > 1840$$

дијелова. $\blacksquare$

Посљедица 2. *Борсукова хипотеза није тачна за* $861 \leqslant d < 1840$.

Доказ. Ако је d произвољан цијели број већи од 861 а мањи од 1840, тада се скуп $S \subseteq \mathbf{R}^{861}$ из претходне теореме може посматрати као скуп у $\mathbf{R}^d$. Свака подјела скупа S на скупова мањег дијаметра садржи више од $1840 \geqslant d+1$ скупова, па је S контрапримјер за Борсукову хипотезу у сваком простору димензије d, $861 \leqslant d < 1840$. $\blacksquare$

На основу разматрања проведених у доказима претходних лема, извешћемо и доказ сљедећег тврђења.

Теорема 2. *За најмањи природни број $f(d)$ за који се сваки скуп у $\mathbf{R}^d$ може разбити на $f(d)$ дијелова, важи неједнакост:*

$$f(d) \geqslant (1.2)^{\sqrt{d}},$$

па за довољно велико d Борсукова хипотеза није тачна.

Доказ. Нека је $p \geqslant 3$ и $d = (2p-1)(4p-3)$. Тада је $5p^2 < d < 8p^2$, односно $\sqrt{d/5} > p > \sqrt{d/8}$. Одавде, на основу леме 4, слиједи да за довољно велико d важи:

$$f(d) > \frac{e}{13d}\left(\frac{27}{16}\right)^{\sqrt{d/8}} > \frac{e}{13d}\left(1.6875^{\sqrt{1/8}}\right)^{\sqrt{d}} > \frac{e}{13d}\left(1.6875^{0.353555}\right)^{\sqrt{d}} > (1.2)^{\sqrt{d}}.$$

За довољно велико d (конкретно, за свако $d \geqslant 41 \times 41 = 1681$) важи:

$$(1.2)^{\sqrt{d}} > d+1,$$

па је, за такве d, $f(d) > d+1$.

То значи да Борсукова хипотеза није тачна за $d \geqslant 1681$. $\blacksquare$

Одавде и из последице теореме 1, гдје је доказано да Борсукова хипотеза није тачна за $861 \leqslant d < 1840$, слиједи да важи тврђење:

Посљедица 3. *Борсукова хипотеза није тачна ни за једно* $d \geqslant 861$.

Напомена 1. Ако се покуша да се контрапримјер конструише постављајући $p = 7$, тада се добија $n = 26, d = 299$ и

$$\sum_{i=0}^{5} C_{26}^{i} = 83682.$$

Истовремено је $2^{24} = 16777216$ и

$$\frac{16777216}{\sum_{i=0}^{7} C_{26}^{i}} < 201.$$

То значи да свака подјела скупа $S \subseteq \mathbf{R}^{299}$ на скупове мањег дијаметра има више од 200 скупова. Дакле, немамо контрапримјер за Борсукову хипотезу у простору $\mathbf{R}^{299}$. То наравно не значи да је Борсукова хипотеза тачна за $d = 299$, чак ни да скуп S није контрапримјер за њу. Једино се може извести закључак да наша разматрања нијесу дала одговор на питање о тачности Борсукове хипотезе у $\mathbf{R}^{299}$.

Напомена 2. У досадашњим разматрањима контрапримјер је тражен у просторима чија је димензија рачуната по формули $d = (2p-1)(4p-3)$, гдје је p прост број. Међутим, слична разматрања се могу провести и за неке друге вриједности p. Рецимо, ако је $p = 9$, тада је $n = 34$, $d = 17 \cdot 33 = 561$. Испоставља се да, тада, уз врло мале измјене, докази лема 1, 2, 3 и 4 остају на снази. Поновимо претходне конструкције, уз одговарајуће модификације.

Теорема 3. *У простору* $\mathbf{R}^{561}$ *постоји скуп који се не може подијелити на* 562 *скупа мањег дијаметра.*

Доказ. Скуп

$$Q = \{\, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \{-1,1\}^{34} : x_1 = 1, \Pi_{i=1}^{34} = 1 \,\}$$

има тачно 2^{32} тачака. Ако су $x = (x_1, \ldots, x_{34})$ и $y = (y_1, \ldots, y_{34})$ вектори из Q, тада се они могу разликовати на парном броју мјеста, па могуће вриједности скаларног производа $\langle x, y\rangle$ припадају скупу $\{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18, \pm 22, \pm 26, \pm 30, 34\}$, при чему је $\langle x, y\rangle = 34$ ако и само ако је $x = y$.

Посматрајмо произвољни подскуп Q' скупа Q у коме не постоје два вектора x и y таква да је $|\langle x, y\rangle| = 2$. Оцијенимо број вектора у Q'. У том циљу за свако $y \in Q'$ посматрајмо полином од 34 промјенљиве, $x_1, \ldots, x_{34}$, дефинисан формулом

$$\begin{aligned} F_y(x) = F_y(x_1, \ldots, x_{34}) &= \frac{1}{9}\Pi_{i=0, i\neq 2, i\neq 7}^{8}(\langle y, x\rangle - i) \\ &= (\langle y, x\rangle - 1)(\langle y, x\rangle - 3)\cdots(\langle y, x\rangle - 6)(\langle y, x\rangle - 8). \end{aligned}$$

Степен полинома F_y једнак је 7.

Докажимо да *за* $y = x$ *број* $F_y(x)$ *није дјељив са* 3. Заиста, тада је $\langle y, x\rangle = 34$, и

$$F_y(x) = (34 \cdot 33 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 26)/9 = 34 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 10 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 26,$$

што није дјељиво са 3.

Нека је $y \neq x$, гдје $(x, y \in Q')$. Тада је

$$\langle y, x\rangle \in \{\pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18, \pm 22, \pm 26, \pm 30\}.$$

Означимо $\langle y, x\rangle$ са s. Тада је

$$F(s) = s(s-1)(s-3)(s-4)(s-5)(s-6)(s-8)/9.$$

Провјером свих могућности доказаћемо да је број $F_y(x)$ дјељив са 3.

Ако је број $s \in \{\pm 6, \pm 18 \pm 30\}$, тада је број $s(s-3)(s-6)$ дјељив са 27, па је $F_y(x)$ дјељив са 3.

Ако је $s \in \{10, -14, 22\}$ тада $(s-1)(s-4) \in \{9 \cdot 6, 15 \cdot 18, 21 \cdot 18\}$, а сваки од ова три броја је дјељив са 27, па је број $F_y(x)$ дјељив са 3.

У случају када је $s \in \{-10, 14, 26\}$, тада $(s-5)(s-8) \in \{9 \cdot 6, 15 \cdot 18, 21 \cdot 18\}$.

На крају, ако је $s = -22$, тада је $s - 5 = -27$ а ако је $s = -26$, тада је $s - 1 = -27$.

То значи да је за свако $s \in \{\pm 6, \pm 10, \pm 14, \pm 18, \pm 22, \pm 26, \pm 30\}$ производ $s(s-1)(s-3)(s-4)(s-5)(s-6)(s-8)$ дјељив са 27, а $F_y(x)$ дјељив са 3.

Ако се у развоју полинома $F_y(x)$ сваки пут x_i^2 замијени са 1, а x_1 са 1, добиће се нови полином, означимо га са $G_y(x)$, у коме се у сабирцима облика $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ појављују само промјенљиве $x_2, \cdots, x_{34}$ и то на првом степену.

Опет разматрајмо једнакост $\sum_{y \in Q'} \alpha_y G_y(x) = 0$, при чему су α_y рационални коефицијенти који нијесу сви једнаки нули. Може се претпоставити да су сви коефицијенти цијели бројеви и да нијесу сви дјељиви са 3. Међутим, тада за свако $y \in Q'$, постављајући $x = y$, добијамо да је

$$\alpha_y G_y(y) + \sum_{z \neq y} \alpha_z G_y(y) = 0$$

одакле слиједи да је $\alpha_y G_y(y)$ дјељиво са 3. Како $G_y(y)$ није дјељиво са 3, то је α_y дјељиво са 3. То је супротно са претпоставком, што значи да је *скуп полинома* $\{G_y : y \in Q'\}$ *линеарно независан над пољем рационалних бројева*, односно да *међу њима не постоји линеарна веза са рационалним коефицијентима.* Пошто су они линеарно независни, број полинома G_y не може бити већи од броја монома облика $x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, $2 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant 34$ а ових је $1 + 33 + C_{33}^2 + \cdots + C_{33}^7 = 5663890$.

Број елемената скупа Q' не може бити већи од овог броја. Дакле, $|Q'| \leqslant 5663890$.

Даље, за свако $x \in Q$ производ xx^T запишимо у облику матрице реда 34×34. Елементе изнад главне дијагонале те матрице (њих има $17 \cdot 33 = 561$), запишимо као један вектор. Тако добијени вектор означимо са $U(x)$ а скуп свих таквих вектора (када $x \in Q$) означимо са S. Тада се за различите $x \in Q$ добијају различити вектори скупа S (разликује се бар прва колона матрице xx^T). Слиједи да је $|S| = |Q| = 2^{32}$.

Оцијенимо растојања тачака скупа S. У том циљу израчунајмо скаларни производ $\langle U(x), U(y)\rangle$. Ако са $M(x)$ означимо вектор чије су компоненте елементи матрице xx^T, која је симетрична и на чијој дијагонали стоје јединице, тада тај вектор има $n^2 = 34^2$ координата, па је

$$\langle M(x), M(y)\rangle = \langle U(x), U(y)\rangle + \langle U(x), U(y)\rangle + 34 = 2\langle U(x), U(y)\rangle + 34 =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} 4x_i x_j (y_i y_j)(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)\cdot(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j) = \langle x, y\rangle^2 \in \{4, 36, 100, 196, 22^2, 26^2, 30^2\}.$$

Овај производ је најмањи (једнак је 4) ако је $\langle x, y\rangle = \pm 2$. Сви вектори скупа S имају исту дужину (која је једнака $\sqrt{561}$). Слиједи да је

$$|U(x) - U(y)|^2 = |U(x)|^2 - 2\langle U(x), U(y)\rangle + |U(y)|^2.$$

Слиједи да се дијаметар скупа S достиже ако и само ако $\langle x, y\rangle \in \{-2, 2\}$; тада је

$$2\langle U(x), U(y)\rangle = \langle x, y\rangle^2 - 34 = -30$$

и

$$(\operatorname{diam} S)^2 = 2 \cdot 561 + 30 = 24\sqrt{2}.$$

Ако је S' подскуп скупа S чији је дијаметар мањи од дијаметра скупа S, тада он не може садржати пар вектора $(U(x), U(y))$ за које је $\langle x, y\rangle \in \{-2, 2\}$. То значи да је

$$|S'| \leqslant |Q'| \leqslant 5663890.$$

Ако је скуп S подијељен на скупове мањег дијаметра, тада тих скупова мора бити више од

$$\frac{2^{32}}{|S'|} \geqslant \frac{42946967296}{5663890} > 758 > 562.$$

Одавде слиједи да је тврђење теореме тачно. ∎

Посљедица 4. *Борсукова хипотеза није тачна ни за једно d веће од 560 и мање од 758.*

Доказ. Ако је $560 < d \leqslant 757$, и $S \subseteq \mathbf{R}^{561}$ скуп из доказа претходне теореме, тада се може сматрати да је $S \subseteq \mathbf{R}^d$. Слиједи (в. доказ претходне теореме) да свака подјела овог скупа на скупове мањег дијаметра садржи више од $758 \geqslant d+1$ дјелова. ∎

Природно је покушати са конструкцијом контрапримјера за Борсукову хипотезу, постављајући $p = 8$, $n = 30$ и $d = 435$.

Тада би се посматрањем полинома

$$F_y(x) = \frac{1}{2^{16}}\Pi_{i\in\{0,1,3,4,5,7\}}(\langle x, y\rangle - i), \quad x, y \in Q$$

и утврђивањем његове дјељивости са 2 могле добити оцјене

$$|S'| = 621\,616, \quad |S| = 2^{28} = 268435456.$$

То значи да ако се скуп S подијели на скупове мањег дијаметра, онда је њих више од

$$268\,435\,456 : 621616 > 431.$$

Ова оцјена је мало слабија од потребне за контрапримјер у $\mathbf{R}^{435}$: требало је умјесто 431 добити 436. Међутим, има разлога да се вјерује да у $\mathbf{R}^{435}$ Борсукова хипотеза није тачна.

Пошто је Борсукова хипотеза оповргнута, поставило се ново питање: за које d је она тачна а за које није. Поновимо, из претходних излагања слиједи да је Борсукова хипотеза тачна за $d \leqslant 3$, док је у посљедицама 3 и 4 доказано да она није тачна за $561 \leqslant d \leqslant 757$ нити за $d \geqslant 860$. Тако је остало отворено питање: да ли је Борсукова хипотеза тачна за $4 \leqslant d \leqslant 560$ и за $758 \leqslant d < 860$.

Питање тачности Борсукове хипотезе за $d > 561$ ријешено је у августу 1998. године, одмах послије X љетње конференције Турнира градова.

Послије те конференције, Дмитриј Гуревич, ученик из Тел Авива и Александар Гајфулин, ученик из Жуковска, добили су одговор на питање о тачности Борсукове хипотезе у просторима димензије d, $757 < d < 860$; за такве d они су конструисали контрапримјере за Борсукову хипотезу. Њихова конструкција се базира на два помоћна тврђења.

Лема 5. *Нека у правоуглом троуглу ABC за хипотенузу AB ($|AB| = D$) и катете AC и BC ($|AC| = r, |BC| = R$) важи неједнакост $r \leqslant R$, или што је исто, $2r^2 \leqslant D^2$. Нека је тачка T катете BC таква да је $|TA| = |TB| = \rho$. Тада је $2\rho^2 \leqslant D^2$.*

Доказ. Тврђење леме слиједи директно из сличности троуглова ABC и TBS, (в. слику 4) гдје је S средиште дужи AB. ■

Сл. 4

Сл. 5

Лема 6. *Нека је $M \subseteq \mathbf{R}^k$ скуп дијаметра D који лежи на $(k-1)$-димензионалној сфери радијуса r, при чему је $r^2 \leqslant D^2/2$. Ако се скуп M не може подијелити на $k{+}1$ скупова мањег дијаметра, тада за свако $d > k$ у $\mathbf{R}^d$ постоји скуп који се не може подијелити на $d+1$ скупова мањег дијаметра.*

Доказ. Нека је $\Sigma_1 \subseteq \mathbf{R}^k$ сфера радијуса $r = r_1$ и $M = M_1 \subseteq \Sigma_1$ скуп дијаметра D који се не може подијелити на $k+1$ скупова мањег дијаметра. Другим ријечима, M_1 је контрапримјер за Борсукову хипотезу у $\mathbf{R}^k$ који лежи на сфери Σ_1, при чему је $2r_1^2 \leqslant D^2$. (в. слику 5).

Претпоставимо да је $C_1(0,\dots,0)$ центар сфере Σ_1 и A произвољна тачка скупа M_1. Тада је растојање тачке $N(0,0,\dots,0,\sqrt{D^2 - r_1^2}) \in \mathbf{R}^{k+1}$ од сваке тачке сфере Σ_1, па дакле и од сваке тачке скупа M_1, једнако D. Дијаметар скупа

$M_2 = M_1 \cup \{N\} \subseteq \mathbf{R}^{k+1}$ је такође једнак D. Скуп M_2 лежи на k-димензионалној сфери $\Sigma_2 \subseteq \mathbf{R}^{k+1}$ чији је центар тачка C_2 која је једнако удаљена од тачака N и A. Троугао NC_1A (в. слику 5) је правоугли, па за полупречник r_2 сфере Σ_2 према претходној леми, важи неједнакост: $r_2^2 \leqslant D^2/2$.

При подјели скупа M_2 на скупове мањег дијаметра, један дио се мора састојати само од тачке N, а осталих дјелова (који су дјелови M_1) мора бити више од $k+1$. Слиједи да се скуп M_2 не може подијелити на $k+2$ дјелова дијаметра мањег од D. То значи да је M_2 контрапримјер за Борсукову хипотезу у $\mathbf{R}^{k+1}$. Према принципу математичке индукције, постоји контрапримјер за Борсукову хипотезу у простору $\mathbf{R}^d$. ∎

Теорема 4. *Ако је $d \geqslant 561$, тада Борсукова хипотеза није тачна у $\mathbf{R}^d$.*

Доказ. Скуп S који је конструисан у доказу теореме 2 је контрапримјер за Борсукову хипотезу у простору $\mathbf{R}^{561}$. Како је $S \subseteq \{-1,1\}^{561}$, то скуп S лежи на сфери полупречника $r = \sqrt{561}$. Дијаметар скупа S је $D = 24\sqrt{2}$, па је $r^2 = 561 = 17 \cdot 33 < 18 \cdot 32 = D^2/2$. Дакле, за свако $d > 561$ у простору $\mathbf{R}^d$ постоји контрапримјер за Борсукову хипотезу. ∎

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from the BOOK*, Berlin Heidelberg, Springer, 1999.

[2] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Москва, Наука, 1974.

[3] М. Л. Гервер, *О разбиении множеств на части менишего диаметра: теоремы и контрпримеры*, Математическое просвещение, 3, 1999, 168–183.

[4] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk's conjecture*, Bull. AMS, (N. S.) Vol. 29, No 1., 60–62, 1993.

[5] Ж. Ковијанић, *ε-мреже и још неки проблеми дискретне геометрије (магистраски рад)*, Математички факултет, Београд, 1994.

[6] A. Nilli, *On Borsuk's problem*, in "Jerusalem combinatorics '93", (H. Barcelo, and G. Kalai, eds), Contemp. Math. Vol. 178, 209–210, 1994.

[7] А. Б. Скопенков, *n-мерни куб, многочлены и решение проблемы Борсука*, Математическое просвешение, 3, 184–188, 1999.

[8] Шклярски Д. О, Ченцов Н. Н, Яглом И. М, *Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии*, Москва, Наука, 1974.

[9] Десятая летная конференция турнира городов, МЦНМО, Москва 1999.

ДОДАТАК

Борсукова хипотеза на љетњој конференцији турнира градова

О љетњим конференцијама Турнира градова

Љетње конференције Турнира градова су сусрети побједника међународног математичког Турнира градова. На њима се рјешавају сложени, садржајни и занимљиви математички задаци, који, понекад, садрже отворена математичка питања.

Ученицима се даје неколико сложених (прецизно, 6) задатака, које ћемо у овм тексту звати проблемима. Сваки од њих се састоји од неколико (10–20) задатака (питања) који припадају једној теми и обједињују се око јединственог циља. Захтјеви и питања која се постављају у тим задацима су сложени, а на нека од њих предлагачи задатака не знају унапријед одговоре.

Рјешавање постављених проблема захтијева доста времена и доста интелектуалних напора. Због тога љетње конференције имају прилично слободну организациону форму. Оне трају неколико дана. Одмах по доласку на олимпијаду ученици добију формулације проблема, а затим се, првог званичног дана такмичења, организује њихова презентација. Аутори појединих проблема коменатаришу услове у задацима, а ти коментари често прерасту у занимљива математичка предавања. Послије презентације, ученицима се савјетује да изаберу по један од проблема које ће рјешавати, јер се сваки учесник оцјењује по проблему на којем постигне најбољи резултат. И поред тога, неки ученици не желе или не могу да се зауставе и концентришу на само један проблем, па раде више њих.

Проблеми припадају, углавном, разним областима математике, теме којима се баве су различите, тако да свако може правити избор према својим математичким склоностима. Дозвољено је сасвим слободно обједињавање у групе па и резултати могу бити индивидуални и колективни. Све те околности смањују напетост на такмичењу; ученици се не надмећу међусобно, већ се усредсређују на проблеме.

Прва питања (задаци) су, опет по правилу, релативно прости; помоћу њих ученик се уводи у тему и проблем. Жири одређује два рока за преглед задатака, иако се задаци могу давати жирију и по редосљеду рјешавања одређених питања. У првом финишу предају се сви до тада ријешени задаци, јер се послије провјере неки од њих, то су најчешће они простији, разјасне у потпуности и рад на њима се прекида. Рјешавање осталих задатака се продужава. На крају, жири гледа комплетне материјале, оцјењује задатке и на официјелном затварању конференције додјељује дипломе. У њима нема побједника, првих и других мјеста, већ се описује за какав математички резултат се ученик награђује.

Од посебног значаја за Љетње конференције Турнира градова је питање припреме задатака и начин избора учесника такмичења. Проблеме припремају висококвалификовани специјалисти. Припреме трају по неколико мјесеци. Практично, одмах по завршетку једне почињу припреме за другу конференцију.

Учесници Љетње конференције бирају се на основу резултата на Турниру градова. Турнир градова је међународно математичко такмичење ученика, које се организује у преко стотину градова свијета. Оно се организује у два кола – јесење и прољећно. У сваком од ових кола постоји припремно и основно такмичење. Учесници се оцјењују по најбољем резултату који постигну на неком од ова четири такмичења. При томе се на сваком од тих такмчења оцјењује најбољи резулатат на три задатка, иако се на сваком такмичењу даје више од три задатка. То опет омогућава да ученици бирају задатке који одговарају њиховом математичком укусу. Занимљиво је да се поред оних који постигну најбоље резултате на Турниру градова, на љетњу конференцију позивају и побједници других престижних математичких олимпијада. Све ово значи да на конференцији скоро нема учесника који су тамо дошли случајно. Напротив, већи дио њих се већ опредијелио за математику као професију. Могло би се рећи да су они скоро спремни да започну научна истраживања. Њих проблеми који се дају на љетњим конференцијама не могу оставити равнодушним.

На једној таквој конференцији, десетој по реду, која је одржана у Хамбургу, августа 1998. године, руски математичар М. Л. Гервер је предложио Борсуков проблем као такмичарски задатак. Проблем је припремио уз помоћ руских математичара А. Ја. Кањел-Бјелова, М. И. Малкина и М. Ју. Панова.

Дајемо формулацију тог проблема, у форми у којој је он постављен учесницима X љетње конфернције Турнира градова.

О разбијању скупа на дјелове мањег дијаметра: теореме и контрапримјери

Пошто се упознате са двије серије припремних и двије серије основних задатака из комбинаторне геометрије и теорије графова, упознаћете драматичну историју једне хипотезе, која је формулисана прије 65 година, уз допунске услове доказана четрдесетих-педестих година а оповргнута 1993. године. Одмах иза основних задатака биће формулисан низ тешких питања, на које одговори нијесу познати.

За све скупове о којима се даље говори претпоставља се да су *ограничени*.

Дијаметар скупа M је најмањи број D, који има својство да *за сваке двије тачке из M растојање међу њима није веће од D*.

Посебно, за скупове M који се састоји од коначно много тачака, дијаметар је *највеће од растојања парова тачака скупа M*.

Припремни задаци (прва серија)

1. Докажите да се сваки скуп у равни може подијелити на три скупа мањег дијаметра.

2. (а) Наведите примјер скупа у равни који није могуће подијелити на два скупа мањег дијаметра.

(б) Наведите примјер скупа у тродимензионалном простору који није могуће подијелити на три скупа мањег дијаметра.

3. Докажите да: (а) круг није могуће подијелити на 2 дијела мањег дијаметра;

(б**) тродимензионалну лопту није могуће подијелити на 3 дијела мањег дијаметра.

(в) Подијелите тродимензионалну лопту на 4 дијела мањег дијаметра.

Борсукова хипотеза и неке теореме о подјели

У 1993. години познати пољски математичар Карол Борсук је изрекао хипотезу:

Сваки ограничен скуп у тродимензионалом простору може се подијелити на четири дијела мањег дијаметра. И уопште, сваки ограничен скуп у d-димензионалом простору може се подијелити на $d+1$ дјелова мањег дијаметра (неопходне чињенице о вишедимензионалним просторима биће касније дате).

Рјешење задатка 1 потврђује Борсукову хипотезу за $d = 2$.

Х. Еглстон 1955. године и Б. Гринбаум и А. Хепеш 1957. доказали су хипотезу за $d = 3$. А још раније Борсукова хипотеза је била доказана за све централносиметричне скупове и сва глатка тијела. (Г. Хадвигер, 1946 г.) [1].

Основни задаци (прва серија)

4. Докажите да се сваки централносиметрични скуп у тродимензионалном простору може подијелити на 4 дијела мањег дијаметра.

5. Докажите да је Борсукову хипотезу довољно провјерити за конвексне скупове (то јест за скупове који заједно са сваким паром тачака садрже цијелу дуж с крајевима у тим тачкама).

Дефиниција. Кроз сваку граничну тачку конвексног скупа V у тродимензионалном простору може се конструисати *бар једна раван ослонца* (тј. таква раван да V лежи са једне њене стране). Кроз тјеме конвексног полиедра (примјер, кроз тјеме коцке) пролази бесконачно много равни ослонца. Конвексни скуп (или конвексно тијело) V назива се *глатким* ако кроз сваку његову граничну тачку пролази *тачно једна* раван ослонца.

6**. Докажите да свако глатко конвексно тијело у тродимензионалном простору може бити подијељено на 4 дијела мањег дијаметра.

Контрапримјери за Борсукову хипотезу

У 1993. години десило се неочекивано: Д. Кан и Г. Калаи су конструисали контрапрмијер за Борсукову хипотезу за $d = 1325$ и за све $d > 2014$. У [3] и [4] конструисани су нови контрапримјери за $d = 946$ и $d = 561$. У даљем тескту предлажу се задаци који воде ка модификацијама тих контрапримјера. Кан и Калаи су конструисали примјере за све димензије облика $d = C_{4p}^2$, гдје је p прост број; специјално, за $p = 11$ добија се $d = 946 = C_{44}^2$.

Многодимензионална коцка

Уведимо правоугаони систем координата x_1, x_2 у равни и x_1, x_2, x_3 у тродимезионалном простору. 4 тачке $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ и $(-1,-1)$ у равни су тјемена квадрата, 8 тачака (x_1, x_2, x_3) у тродимензионалном простору, гдје је свака од координата x_j једнака 1 или -1, су тјемена коцке.

Аналогно, 16 тачака (x_1, x_2, x_3, x_4), гдје је свака од координата x_j једнака 1 или -1, су тјемена *четвородимензионалне* коцке; 32 тачке $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, гдје је свака од координата x_j једнака 1 или -1, су тјемена *петодимензионалне* коцке итд.

За n-димензионалну коцку (за скуп тачака $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $|x_j| \leqslant 1)$) користићемо ознаку $[-1,1]^n$.

Растојање $r = |xx'|$ између тачака

(1) $$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{и} \quad x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

дефинише се формулом

(2) $$r^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2.$$

Сјединивши координатни почетак $0 = (0, 0, \dots, 0)$ с тачком $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, добијамо вектор $0x$; скаларни производ вектора $0x$ и $0x'$ је број

(3) $$xx' = x_1x'_1 + x_2x'_2 + \cdots + x_nx'_n$$

За $n = 2$ и $n = 3$ то су изворне формула за растојање и за скаларни производ у равни и у тродимензионалном простору.

Припремни задаци (друга серија)

7. Нека су (1) тјемена n-димензионалне коцке $[-1, 1]^n$: свака од координата x_j и свака од координата x'_j једнака 1 или -1, $j = 1, 2, \dots n$.

(а) Нека је $x_j = x'_j$ за s вриједности индекса j и $x_j \neq x'_j$ за t вриједности индекса j, $s + t = n$. Чему је једнак тада квадрат растојања (2) између тачака (1)?

(б) Колико има различитих у паровима растојања између тјемена коцке $[-1, 1]^n$? Колико тјемена лежи на сваком од тих растојања од датог тјемена?

Упутство

За квадрат постоје два различита пара ненултих растојања: дужина стране и дужина дијагонале; ако се фиксира тјеме $(1, 1)$ квадрата, онда се, у погледу растојања од тог тјемена, сва четири тјемена квадрата дијеле на три групе:

$$4 = 1 + 2 + 1$$

(у првој групи – само тјеме $(1, 1)$, у другој – тјемена $(1, -1)$ и $(-1, 1)$, у трећој – $(-1, -1)$). За тродимензионалну коцку одговарајућа подјела има облик

$$8 = 1 + 3 + 3 + 1.$$

Продужите $16 =?$, $32 =?$, $64 =?$, $128 =?$, $256 =?$, $512 =?$, $1024 =?$, $\dots, 2^n =?$

(в) Чему је једнак дијаметар коцке $[-1, 1]^n$?

8. Какве вриједности узима скаларни производ (3), ако су (1) тјемена n-димензионалне коцке $[-1, 1]^n$?

Дефиниција. За векторе $0x$ и $0x'$ каже се да су *ортогонални*, ако је њихов скаларни производ једнак 0.

9. За које n међу векторима који спајају центар 0 коцке $[-1, 1]^n$ са њеним тјеменима постоје они који су ортогонални? Фиксирајмо тјеме x коцке; за колико су тјемена x' вектори $0x'$ и $0x$ ортогонални?

Идеја контрапримјера

Конструисаћемо два коначна скупа X и Y (X ће бити подскуп тјемена n-димензионалне коцке, Y – подскуп тјемена d-димензионалне коцке: $X \subset [-1, 1]^n$,

$Y \subset [-1,1]^d$, $d = C_{n+1}^2$), која ће се састојати од једног те истог броја тачака: $|X| = |Y| = N$.

Међу скуповима X и Y биће успостављена узајамно једнозначна кореспонденција

$$x \longleftrightarrow y, \quad x' \longleftrightarrow y', \tag{4}$$

таква да *максимално удаљеним једној од друге тачкама* y, y' одговарају *ортогонални вектори* $0x, 0x'$, тј, ако је D дијаметар Y, тада ће важити

$$(x, x') = 0 \longleftrightarrow |y, y'| = D. \tag{5}$$

Затим се Y трансформише у *граф* Γ: тјемена y, y' се спајају ивицом ако и само ако је $|y, y'| < D$ и истражују се комплетни подграфови графа Γ (тј. такви подграфови у којима су свака два тјемена спојена ивицом); израчунава се број q тјемена *максималног* (који садржи највећи могући број тјемена) комплетног подграфа Π графа Γ и доказује неједнакост

$$N/q > d + 1. \tag{6}$$

10. Докажите да из (6) слиједи да је минимални број дјелова дијаметра $< D$, на које можемо подијелити скуп Y, већи од $d+1$ (тако да (6) даје контрапримјер за Борсукову хипотезу)

Због (4) и (5) све конструкције се фактички реализују не у Y већ у X: наиме, X се трансформише у граф Γ и тјемена x, x' се спајају ивицама ако и само ако је $(x, x') \neq 0$.

Основни задаци (друга серија)

11. Поставимо $n = 43$ и утопимо n-димензионалну коцку $[-1,1]^n$ у $(n+1)$-димензионални простор с координатама $\{x_j\}_{j=0}^n$. Другим ријечима, $[-1,1]^{43}$ се третира као 43-димензионална страна $x_0 = 1$ коцке $[-1,1]^{44}$. Дефинишимо X као сљедећи подскуп тјемена коцке. Тјеме $\{x_j\}_{j=0}^n$, $x_j = \pm 1$, припада скупу X ако је $x_0 = 1$ и број минус јединица међу $\{x_j\}_{j=1}^n$ је паран. Провјерите да X садржи $N = 2^{n-1}$ тачака: $|X| = N = 2^{42}$.

12. Поставимо сада $d = C_{44}^2 = 946$ и пресликајмо X на сљедећи скуп Y тјемена $d-$димензионалне коцке $[-1,1]^d$.

Размотримо скуп P свих парова (i,j), $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n = 43$ (провјерите да је број таквих парова једнак d, тако да их можемо нумерисати бројевима $k = k(i,j)$, $1 \leqslant k \leqslant d$, и тјемену $x = \{x_j\}_{j=0}^n \in X$ придружимо тачку $y = y(x) \in Y$ с координатама

$$y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j, \ (i,j) \in P, \ 1 \leqslant k = k(i,j) \leqslant d.$$

Докажите да је конструисано пресликавање $y = y(x)$ узајамно једнозначно и, дакле, да Y (као и X) садржи N тачака:

$$|Y| = |X| = N = 2^{43} = 43\,398\,046\,411\,104.$$

Граф Γ и његов максимални комплетни подграф Π

Нека је D дијаметар скупа Y. Трансформишимо Y у граф Γ, сјединивши ивицама све парове тјемена $y, y' \in Y$ између којих је растојање $|yy'|$ мање од D. Нека је Π максимални комплетни подграф графа Γ, тј. такав (који садржи највећи могући број тјемена) подграф код кога су било која два тјемена спојена ивицама. Када ријешите задатке 14–18, увидјећете да важи:

Теорема. *Број* $|\Pi|$ *тјемена подграфа* Π *није већи од*

$$\sum_{k=0}^{10} C_{43}^{k} = 2\,665\,685\,155.$$

Прихватајући да је та теорема тачна, ријешите задатак 13.

13. Провјерите неједнакост $N/|\Pi| > 1\,649$ и објасните зашто из њега слиједи да је *Борсукова хипотеза нетачна за све* d, $946 \leqslant d \leqslant 1\,648$.

14. Докажите да за различите $x, x' \in X$ скаларни производ $(x, x') = \sum_{j=0}^{n} x_j x'_j$ може узети вриједности $0, \pm 4k, 1 \leqslant k \leqslant 10$, и не узима никакве друге вриједности; $(x, x) = 44$.

15. Докажите да је растојање $|yy'|$ међу тјеменима $y = y(x), y' = y(x') \in Y$ једнако дијаметру D ако и само ако је скаларни производ $(x, x') = 0$.

16. Сада се граф Γ може добити на нови начин, тако што се ивицама повежу сви парови $x, x' \in X$, за које је $(x, x') \neq 0$. Изведите одатле закључак да број тјемена $|\Pi|$ максималног комплетног подграфа Π графа Γ није мањи од $\sum_{k=0}^{10} C_{43}^{k}$.

Полиноми $F_a(x)$ и $G_a(x)$

Сваком $a \in X$ придружимо полином

(7)
$$F_a(x) = ((a,x)+1)\,((a,x)-1)\,((a,x)-2)\,((a,x)+2)\cdots((a,x)-5)\,((a,x)+5)\,.$$

Ако се (7) запише у облику линеарне комбинације монома и узастопно примијени чињеница да је $x_j^2 = 1$, добијамо нови, једнак $F_a(x)$ на X, полином $G_a(x)$ с мономима $cx_{j_1}^{s_1} x_{j_2}^{s_2} \cdots cx_{j_{10}}^{s_{10}}$, c – цијели бројеви, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j-10 \leqslant n = 43, s_k = 0$ или 1.

17. Докажите да за свако $a, x \in X$ важе сљедеће релације. Ако је $a \neq x$ и $(a, x) \neq 0$ тада је $F_a(x) \equiv 0 \pmod{11}$. Ако је $a = x$, тада је $F_a(x) \not\equiv 0 \pmod{11}$.

18. Нека су $\{a_j\}_{j=1}^{q} \in X$ у паровима неортогонални: скаларни производ било која два од њих је различит од нуле. Полиноме $G_a(x)$ за $a = a_j$ означимо са $g_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant q$. Докажите да су $g_j(x)$ *линеарно независни над прстеном цијелих бројева*: ако је

$$c_1 g_1(x) + \cdots + c_q g_q(x) \equiv 0, \quad \text{гдје су} \quad c_1, \ldots, c_q \text{ цијели бројеви,}$$

тада је $c_1 = \cdots = c_q = 0$. Изведите одатле теорему о броју $|\Pi|$ тјемена максималног подграфа Π графа Γ: докажите да Π није веће од $\sum_{k=0}^{10} C_{43}^{k}$.

Нови контрапримјери

Задаци 11–18 доводе до закључка: *Борсукова хипотеза је нетачна за све* d, $946 \leqslant d \leqslant 1648$. Задаци 19–21 доводе до аналогног закључка за $860 \leqslant d \leqslant 2319$ и $561 \leqslant d \leqslant 757$.

19. Поставимо

$$n = 41, N = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776,\; q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^{k} = 473\,732\,328.$$

(а) Утопимо n-димензионалну коцку $[-1,1]^n$ у $(n+1)$-димензионални простор са координатама $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ и, третирајући $[-1,1]^{41}$ као 41-димензионалну страну $x_0 = 1$ коцке $[-1,1]^{42}$, дефинишимо X слично као што је то урађено у задатку 11: тјеме $\{x_j\}_{j=0}^{n}$, $x_j = \pm 1$, припада X ако је $x_0 = 1$ и број минус јединица међу $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ је паран.

Провјерите да X садржи $N = 2^{n-1}$ тачака: $|X| = N = 2^{40}$.

(б) Као у задатку 12, пресликајмо X на подскуп Y тјемена d-димензионалне коцке $[-1,1]^d$, $d = C_{42}^{2} = 861$.

Размотримо скуп P свих парова (i,j), $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n = 41$ (број таквих парова једнак је d, тако да их можемо нумерисати бројевима $k = k(i,j)$, $1 \leqslant k \leqslant d$, и тјемену $x = \{x_j\}_{j=0}^{n} \in X$ придружимо тачку $y = y(x) \in Y$ с координатама

$$y_k = y_{k(i,j)} = x_{i-1}x_j,\; (i,j) \in P, 1 \leqslant k = k(i,j) \leqslant d.$$

Докажите да Y, као и X, садржи N тачака: $|Y| = |X| = N = 2^{40} = 1\,099\,511\,627\,776$.

(в) Које вриједности узима скаларни производ $(x,x') = \sum_{j=0}^{n} x_j x'_j$ за $x, x' \in X$?

(г) Докажите да је растојање $|yy'|$ међу тјеменима $y = y(x)$, $y' = y(x') \in Y$ једнако диајметру D скупа Y ако и само ако је скаларни производ $(x,x') = \pm 2$.

(д*) Трансформишимо X у граф Γ, спајајући ивицама све парове тјемена $x, x' \in X$ за које је $(x,x') \neq \pm 2$. Докажите да је број тјемена $|\Pi|$ максималног комплетног подграфа Π графа Γ једнак $q = \sum_{k=0}^{9} C_{41}^{k}$.

ђ) Из неједнакости

$$\frac{N}{q} = \frac{1\,099\,511\,627\,776}{473\,732\,328} > 2\,320 \tag{8}$$

изведите закључака да је *Борсукова хипотеза нетачна за свако* d, $861 \leqslant d \leqslant 2\,319$.

20. Из неједнакости (8) изведите закључак да *Борсукова хипотеза није тачна за* $d = 860$.

21. Постављајући $n = 33$, $d = C_{43}^{2} = 561$, $N = 2^{32} = 4\,294\,967\,296$ и $q = \sum_{k=0}^{7} C_{33}^{k} = 5\,663\,890$, закључите да из неједнакости $N/q > 758$, да је *Борсукова хипотеза нетачна за све* d, $561 \leqslant d \leqslant 757$.

Неријешена питања

Упоређујући добијене резултате са [2]–[4], видимо да је *Борсукова хипотеза нетачна за све* d, $561 \leqslant d \leqslant 757$ *и* $d \geqslant 860$.

22. Да ли је Борсукова хипотеза тачна за $3 < d < 561$? Шта је тачно, теорема или контрапримјер за $757 < d < 860$?

На дио тих питања, можда се успије одговорити ако се ријеше задаци који слиједе. За прелаз од тих задатака на геометријске треба замијенити нуле и јединице респективно са $+1$ и -1.

А. Размотримо $2^{10} = 1024$ тачака и нумеришимо их бројевима $0, 1, 2, 3, \ldots,$ 1 023.

Сваки од ових бројева запишимо у бинарном облику (као 10-цифарски број):

$$0)\ 000\,0000\,000,\ \ 1)\ 000\,0000\,001,\ \ 2)\ 000\,0000\,010, \ldots, 1023)\ 111\,1111\,111.$$

Слијева сваком броју допишимо 0, сдесна 0 или 1 тако да број јединица (као и број нула) постане паран:

$$0)\ 0000\,0000\,0000,\ \ 1)\ 0000\,0000\,0011,\ \ 2)\ 0000\,0000\,0101, \ldots, 1023)\ 0111\,1111\,1110.$$

Сваком пару добијених (12-цифарских) бројева a, b придружимо $a * b$, које има на i-ом мјесту цифру 0 ако су i-те цифре бројева a и b једнаке и цифру 1 ако су i-те цифре бројева a и b различите.

Конструишимо граф Г спојивши дио тачака ивицама по сљедећем правилу: тачке нумерисане са a и b се *не спајају* ако $a * b$ има једнако (по 6) нула и јединица и *спајају* у свим осталим случајевима.

(а) Колико тјемена има максимални комплетни подграф графа Г?

(б) На који се *минимални* број комплетних подграфова може подијелити граф Г?

В. Уопштите задатак А на случај 2^{4k-2} тачака.

С. Уопштите задатак А на случај 2^{4k} тачака (у том случају при конструкцији графа Г тачке нумерисане са a и b се *не спајају* ако $a * b$ има скоро једнако нула и јединица ($k+2$ једних и k других), и *спајају* ако се број нула и јединица у $a * b$ разликује за више од 2.)

23. Борсукова хипотеза се може формулисати на сљедећи начин:

Означимо са $f(d)$ минимални од бројева m за који се сваки ограничени скуп у d-димензионалном простору може подијелити на m дјелова мањег дијаметра. Тада је $f(d) = d + 1$.

У [2] је добијена оцјена $f(d) \geqslant 1.2^{\sqrt{d}}$. Како стварно расте $f(d)$ са растом d?

Списак литературе

[1] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц., *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Москва, Наука, 1965.

[2] Kahn, J., Kalai, G., Bull. AMS (N.S.) 1993. V. 29. N. 1, 60–62.

[3] Nilli, A., Contem. Math. 1994, V. 178, 209–210.

[4] Райгородский, А., УМН, 1997, Т. 52, Вып. 6, 181–182.