Др Јован Д. Кечкић

О ОДРЕЂИВАЊУ АСИМПТОТА КРИВИХ ЛИНИЈА

1. У нашим, а и у иностраним средњошколским уџбеницима у којима се разматра аналитичка геометрија у равни често се наилази на следећа тврђења у вези са хиперболом

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (a > 0, b > 0) \tag{1}$$

и правом

$$y = kx + n: \tag{2}$$

1° права (2) сече хиперболу (1) у двема тачкама ако је $b^2 + n^2 - a^2k^2 > 0$;

2° права (2) је тангента хиперболе (1) ако је $b^2 + n^2 - a^2k^2 = 0$, што значи да је то услов додира праве (2) и хиперболе (1);

3° права (2) и хипербола (1) немају заједничких тачака ако је $b^2 + n^2 - a^2k^2 < 0$.

Напомена 1. Ово је био цитат из једног нашег уџбеника, али намерно не наводим из ког, јер се идентична или слична тврђења могу наћи и на многим другим местима. Понегде пише и да важе тврђења обратна тврђењима 1°, 2° и 3°, тј. да се реч „ако“ у тим тврђењима може заменити фразом „ако и само ако“.

У ствари, тврђења 1° и 2° нису тачна, а тврђење 3° није тачно ако се „ако“ замени са „ако и само ако“. Примери који то показују сасвим су једноставни.

Нека је $a = b = k = n = 1$. Тада услов $b^2 + n^2 - a^2k^2 > 0$ јесте испуњен, јер постаје $1 > 0$, али се лако показује да права $y = x + 1$ не сече хиперболу $x^2 - y^2 - 1 = 0$ у двема различитим тачкама, већ само у једној тачки, наиме у тачки $(-1, 0)$.

Нека је $a = b = k = 1$, $n = 0$. Тада услов $b^2 + n^2 - a^2k^2 = 0$ јесте испуњен, али права $y = x$ и хипербола $x^2 - y^2 - 1 = 0$ немају заједничких тачака; дакле, не додирују се.

Напомена 2. Појмови *тангента* и *права и крива се додирују* обично нису прецизно дефинисани у средњошколској аналитичкој геометрији и, по мом мишљењу, нема ни разлога да буду пре увођења извода. Углавном се иде на интуитивну представу, по аналогији са појмовима тангента круга, односно додиривање праве и круга.

До наведених грешака долази се због једног превида. Наиме, из једначина (1) и (2), као последица, добија се једначина

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2knx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0 \qquad (a > 0, b > 0) \tag{3}$$

и тврђења 1°, 2° и 3° (као и њима обратна тврђења) заиста јесу тачна, али под условом да је $b^2 - a^2k^2 \neq 0$, тј. да је (3) квадратна једначина по x.

Међутим, ако је $b^2 - a^2k^2 = 0$, једначина (3) своди се на

$$\pm 2abnx - (a^2n^2 + a^2b^2) = 0, \tag{4}$$

а то су две линеарне једначине, са по тачно једним решењем, ако је $n \neq 0$, и та решења су апсцисе јединствених пресечних тачака правих (4) и хиперболе (1). Ако је $n = 0$, (4) постаје $a^2b^2 = 0$, што је нетачно, па права (2) и хипербола (1) тада немају заједничких тачака.

Приметимо да када је $b^2 - a^2k^2 = 0$, $n = 0$, онда из (2) добијамо $y = \pm(b/a)x$, а то су, као што знамо, једначине *асимптота* хиперболе (1). Дакле, асимптоте хиперболе (1) добијају се тако што се коефицијенти уз x^2 и x у једначини (3) изједначе са нулом, при чему слободан члан у тој једначини није 0.

Напомена 3. Ни појам асимптоте се не дефинише прецизно у средњошколској настави аналитичке геометрије, тј. пре увођења граничних вредности. Уместо тога, опет се (сасвим оправдано) иде на интуитивну представу: асимптота неке криве је права линија којој се та крива све више и више приближава, али је *током тог приближавања* не сече нити додирује. На пример, иако се права (p) и крива (k) приказане на слици секу у тачкама A и B, ипак је права (p) асимптота криве (k), јер јој се крива (k) све више и више приближава (што је x веће и веће), али *током тог приближавања* је нити сече нити додирује. И права (q) је такође асимптота криве (k).

2. Претходна једноставна анализа стандардне грешке у вези са хиперболом (1) и правом (2) указује на један општи метод за тражење асимптота криве линије $F(x,y) = 0$, где је $F(x,y)$ полином по x и y. Размотрићемо детаљно случај када је $F(x,y)$ полином степена 2, тј. тражимо асимптоте криве

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + b_1x + b_2y + c = 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0). \tag{5}$$

Из једначина (5) и (2) као последицу добијамо једначину

$$(a_1 + a_2k + a_3k^2)x^2 + (a_2n + 2a_3kn + b_1 + b_2k)x + (a_3n^2 + b_2n + c) = 0,$$

и, по аналогији са хиперболом (1), асимптоте облика (2) тражимо из услова

$$a_1 + a_2k + a_3k^2 = 0, \quad a_2n + 2a_3kn + b_1 + b_2k = 0, \quad a_3n^2 + b_2n + c \neq 0. \tag{6}$$

Ако ставимо

$$P(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2, \qquad Q(t) = b_1 + b_2 t, \tag{7}$$

тада се прве две једнакости из (6) могу написати у облику

$$P(k) = 0, \qquad P'(k)n + Q(k) = 0, \tag{8}$$

па коефицијенте k и n у једначини асимптоте (2) одређујемо из система једначина (8), уз услов

$$a_3 n^2 + b_2 n + c \neq 0. \tag{9}$$

3. Претпоставимо да постоји решење система (8), дато са $k = p$, $n = q$, такво да услов (9) није испуњен, тј. да важи

$$P(p) = 0, \quad P'(p)q + Q(p) = 0, \quad a_3 q^2 + b_2 q + c = 0. \tag{10}$$

То значи да је $F(x, px + q) \equiv 0$, а то значи да је полином $F(x,y)$ дељив полиномом $y - px - q$, и с обзиром да је $F(x,y)$ полином степена 2, имамо $F(x,y) = (y - px - q)(Ax + By + C)$, па су једначином $F(x,y) = 0$, тј. једначином (5), представљене две праве линије које могу да се секу ($A + pB \neq 0$), могу да буду паралелне ($A + pB = 0$, $C + qB \neq 0$), или које могу да се поклапају ($A + pB = 0$, $C + qB = 0$).

Да бисмо одредили услов који обезбеђује да су једначином (5) дефинисане две праве линије (или једна), претпоставимо да је $P(p) = 0$, $P'(p) \neq 0$. Тада је $q = -Q(p)/P'(p)$ и трећа једначина у (10) постаје

$$a_3 \Big(\frac{Q(p)}{P'(p)}\Big)^2 - b_2 \frac{Q(p)}{P'(p)} + c = 0,$$

што се, с обзиром да је $P'(p) = 2a_3 p + a_2 \neq 0$, $Q(p) = b_2 p + b_1$, после краћег рачуна своди на

$$(b_2^2 - 4a_3 c)(-a_3 p^2 - a_2 p) - a_2 b_1 b_2 + a_2^2 c + a_3 b_1^2 = 0. \tag{11}$$

Међутим, како је $P(p) = 0$, имамо $-a_3 p^2 - a_2 p = a_1$, и (11) постаје

$$a_1 b_2^2 - 4a_1 a_3 c - a_2 b_1 b_2 + a_2^2 c + a_3 b_1^2 = 0. \tag{12}$$

Једнакост (12) може да се напише у прегледнијем облику

$$D = 0, \quad \text{где је} \quad D = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & 2a_3 & b_2 \\ b_1 & b_2 & 2c \end{vmatrix} \tag{13}$$

и она представља *потребан* услов да су једначином (5) дефинисане две праве линије (које могу да се секу, да буду паралелне или да се поклапају). Заиста, иако смо горњи услов извели из претпоставке $P(p) = 0$, $P'(p) \neq 0$, он важи у општем случају. Наиме, ако једначина (5) представља две праве, она је еквивалентна некој једначини облика

$$(14) \qquad (Ax + By + C)(Dx + Ey + F) = 0$$

која кад се развије гласи

$$(15) \quad ADx^2 + (AE + BD)xy + BEy^2 + (AF + CD)x + (BF + CE)y + CF = 0.$$

Једначина (5) и једначина (14), односно (15), еквивалентне су ако и само ако постоји $\lambda \neq 0$, тако да је

$$a_1 = \lambda AD, \quad a_2 = \lambda(AE + BD), \quad a_3 = \lambda BE,$$
$$b_1 = \lambda(AF + CD), \quad b_2 = \lambda(BF + CE), \quad c = \lambda CF,$$

и онда није тешко проверити да је услов (13) заиста испуњен.

Услов (13) није међутим „сасвим“ *довољан* да би једначином (5) биле дефинисане две праве линије. Наиме, услов (13) обезбеђује да се полином на левој страни једначине (5) може факторизовати на два линеарна полинома, али њихови коефицијенти могу да буду комплексни бројеви, а такав случај у (реалној) аналитичкој геометрији нема интерпретацију.

Пример 1. За једначину

$$(16) \qquad x^2 + 2y^2 + 2x + 8y + 9 = 0$$

услов (13) је испуњен, и заиста (16) се може написати у облику

$$(x + \sqrt{2}\,iy + 1 + 2\sqrt{2}\,i)(x - \sqrt{2}\,iy + 1 - 2\sqrt{2}\,i) = 0,$$

али том једначином нису представљене две праве линије (у реалној аналитичкој геометрији). С обзиром да се (16) може написати и у облику $(x+1)^2+2(y+2)^2 = 0$, јасно је да је том једначином дефинисана само једна тачка, тј. тачка $(-1, -2)$.

Слично, услов (13) испуњен је и за једначину

$$(17) \qquad x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x + 8y + 20 = 0$$

и она се може факторизовати:

$$(x + 2y + 2 - 4i)(x + 2y + 2 + 4i) = 0,$$

али ипак не представља две праве линије. С обзиром да је (17) еквивалентно са

$$(18) \qquad (x + 2y)^2 + 4(x + 2y) + 20 = 0,$$

јасно је да (17) одређује празан скуп таака у равни, јер не постоје реални бројеви x и y такви да важи (18); наиме, једначина $t^2 + 4t + 20 = 0$ нема реална решења.

Уопште, може да се покаже да из (13) следи да су једначином (5) дефинисане две праве линије, једна права линија, једна тачка, или празан скуп тачака, па ни у једном од тих случајева нема смисла тражити асимптоте.

4. Вратимо се једначини (5), полиномима P и Q дефинисаним са (7) и детерминанти D дефинисаној са (13).

Претпоставимо да једначина $P(t)=0$ има два (различита) решења по t: α и β, што је еквивалентно са: $a_3\neq 0$, $a_2^2-4a_1a_3>0$. Тада је $P(\alpha)=P(\beta)=0$, $P'(\alpha)\neq 0$, $P'(\beta)\neq 0$ (јер су α и β просте нуле полинома P) и крива (5), под условом $D\neq 0$, има две асимптоте

$$y=\alpha x-\frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)},\qquad y=\beta x-\frac{Q(\beta)}{P'(\beta)};\tag{19}$$

дакле, у том случају крива (5) је хипербола.

Пример 2. За криву

$$x^2+2xy-3y^2+2x+y+3=0\tag{20}$$

имамо $P(t)=1+2t-3t^2$, $Q(t)=2+t$, $D=-66$. Важи: $P(t)=0$ ако и само ако $t=1$ или $t=-1/3$. Даље, $P'(t)=2-6t$, па је $P'(1)=-4$, $P'(-1/3)=4$. Крива (20) је хипербола чије су асимптоте

$$y=x-\frac{Q(1)}{P'(1)}\quad \text{и}\quad y=-\frac{1}{3}x-\frac{Q(-1/3)}{P'(-1/3)},$$

тј. $y=x+\dfrac{3}{4}$ и $y=-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{12}$.

Ако је $P(\alpha)=P(\beta)=0$, $P'(\alpha)\neq 0$, $P'(\beta)\neq 0$, $D=0$, онда једначина (5) представља две праве линије које се секу и чије су једначине дате са (19).

Пример 3. За криву

$$2x^2+xy-6y^2-7x+14y-4=0\tag{21}$$

имамо $P(t)=2+t-6t^2$, $Q(t)=-7+14t$, па је $P(t)=0$ ако и само ако $t=2/3$ или $t=-1/2$ и можемо узети $\alpha=2/3$, $\beta=-1/2$. Како је $P'(t)=1-12t$, имамо $P'(\alpha)=-7$, $P'(\beta)=7$, а такође је $Q(\alpha)=7/3$, $Q(\beta)=-14$. У овом случају је $D=0$, и једначина (21) еквивалентна је са

$$\Big(y-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\Big)\Big(y+\frac{1}{2}x-2\Big)=0$$

и представља две праве линије које се секу.

До сада смо испитивали када крива (5) има асимптоте облика $y=kx+n$. Међутим, крива (5) може да има и тзв. вертикалну асимптоту чија једначина $x=\lambda$ није обухваћена једначином $y=kx+n$. Из једначине (5) и једначине $x=\lambda$ добијамо

$$a_3y^2+(a_2\lambda+b_2)y+(a_1\lambda^2+b_1\lambda+c)=0$$

и вертикална асимптота може да постоји само ако је $a_3=0$. Међутим, у овом одељку важи претпоставка $a_3\neq 0$, што значи да крива (5) нема вертикалну асимптоту.

5. Претпоставимо да једначина по t: $P(t)=0$ има тачно једно решење α, што је еквивалентно са:

$$a_3\neq 0,\quad a_2^2-4a_1a_3=0\quad \text{или}\quad a_3=0,\quad a_2\neq 0.$$

Ова два случаја разматрамо посебно.

Нека је прво $a_3\neq 0$, $a_2^2-4a_1a_3=0$. Тада је $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$. Ако је $Q(\alpha)\neq 0$, крива (5) нема асимптоту.

Нека је $Q(\alpha)=0$. Из једнакости

$$a_2+2a_3\alpha=0,\quad b_1+b_2\alpha=0\qquad (a_3\neq 0)$$

добијамо $b_2\neq 0$ и $a_2b_2=2a_3b_1$. Такође из $a_2^2-4a_1a_3=0$, $a_3\neq 0$, следи $a_1=a_2^2/4a_3$ и једначина (5), после множења са $4a_3$, постаје

$$a_2^2x^2+4a_2a_3xy+4a_3^2y^2+4a_3b_1x+4a_3b_2y+4a_3c=0,$$

тј.

$$a_2^2x^2+4a_2a_3xy+4a_3^2y^2+2a_2b_2x+4a_3b_2y+4a_3c=0, \tag{22}$$

јер је $2a_3b_1=a_2b_2$. Лако се проверава да је за једначину (22) испуњен услов (13); прве две врсте одговарајуће детерминанте су пропорционалне, па у овом случају нема смисла тражити асимптоте.

Напомена 4. У ствари, јасно је да се (22) може написати у облику

$$(a_2x+2a_3y)^2+2b_2(a_2x+2a_3y)+4a_3c=0,$$

и она представља две паралелне праве ако је $b_2^2-4a_3c>0$, једну праву ако је $b_2^2-4a_3c=0$, или празан скуп тачака ако је $b_2^2-4a_3c<0$.

Претпоставка $a_3\neq 0$ такође повлачи, као и у претходном одељку, да крива (22) нема вертикалну асимптоту.

Размотримо сада други случај кад једначина $P(t)=0$ има тачно једно решење α, тј. случај $a_3=0$, $a_2\neq 0$. Тада је

$$D=\begin{vmatrix}2a_1 & a_2 & b_1\\ a_2 & 0 & b_2\\ b_1 & b_2 & 2c\end{vmatrix}=2(a_2b_1b_2-a_2^2c-a_1b_2^2).$$

У овом случају систем једначина (8) има решење

$$k=\alpha=-\frac{a_1}{a_2},\quad n=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_2^2}$$

и крива (5), уз услов $D\neq 0$, има асимптоту

$$y=-\frac{a_1}{a_2}\,x+\frac{a_1b_2-b_1a_2}{a_2^2}. \tag{23}$$

Испитајмо да ли (5) у овом случају има вертикалну асимптоту. С обзиром да је $a_3=0$, $a_2\neq 0$, из једначине (5) и једначине $x=\lambda$ добијамо

$$(a_2\lambda+b_2)y+(a_1\lambda^2+b_1\lambda+c)=0$$

и видимо да, уз услов $D \neq 0$, постоји вертикална асимптота чија је једначина

$$x = -b_2/a_2. \tag{24}$$

Дакле, ако је $a_3 = 0$, $a_2 \neq 0$, $D \neq 0$, крива (5) је хипербола са асимптотама (23) и (24).

Пример 4. Једначина

$$3x^2 - xy + 7x - 5y + 9 = 0$$

представља хиперболу чије су асимптоте $y = 3x - 8$ и $x = -5$.

Ако је $D = 0$, тада не тражимо асимптоте криве (5).

Напомена 5. Ако је $D = 0$, тј.

$$c = \frac{a_2 b_1 b_2 - a_1 b_2^2}{a_2^2}, \tag{25}$$

једначина (5), после множења са a_2^2, постаје

$$a_1 a_2^2 x^2 + a_2^3 xy + a_2^2 b_1 x + a_1 b_1 b_2 - a_1 b_2^2 = 0,$$

што је еквивалентно са

$$(a_2 x + b_2)(a_2^2 y + a_1 a_2 x + a_2 b_1 - a_1 b_2) = 0,$$

и овом једначином дефинисане су две праве линије које се секу.

Пример 5. Једначина

$$3x^2 - xy + 7x - 5y - 40 = 0$$

може да се напише у облику $(x+5)(y-3x+8) = 0$.

Напомена 6. Када је $a_3 = 0$, једначина (5) може да се представи у облику

$$y = f(x), \quad \text{где је} \quad f(x) = -\frac{a_1 x^2 + b_1 x + c}{a_2 x + b_2}.$$

Одредити, уобичајеним методима, све асимптоте овако дефинисане функције f, и упоредити добијене резултате са претходним. Посебно обратити пажњу на случај кад је c дато са (25).

6. Претпоставимо да једначина $P(t) = 0$ нема решења, што је еквивалентно са: $a_3 \neq 0$, $a_2^2 - 4a_1 a_3 < 0$ или $a_3 = a_2 = 0$, $a_1 \neq 0$. У том случају крива (5) нема асимптоте.

7. На основу претходних разматрања може доста једноставно да се утврди која је линија представљена једначином (5), и то у зависности од полинома P и Q дефинисаних са (7) и детерминанте D дефинисане са (13).

Разликујемо следеће случајеве.

1. Једначина $P(t) = 0$ има два решења α и β.

1.1. Ако $D \neq 0$, једначина (5) представља хиперболу чије су асимптоте (19).

1.2. Ако је $D = 0$, једначина (5) представља две праве које се секу и чије су једначине (19).

2. Једначина $P(t) = 0$ има тачно једно решење α.

2.1. Ако је $a_3 \neq 0$, $Q(\alpha) \neq 0$, једначина (5) представља параболу.

2.2. Ако $a_3 \neq 0$, $Q(\alpha) = 0$, једначина (5) представља две паралелне праве, једну праву или празан скуп тачака.

2.3. Ако $a_3 = 0$, $D \neq 0$, једначина (5) представља хиперболу чије су асимптоте (23) и (24).

2.4. Ако је $a_3 = 0$, $D = 0$, једначина (5) представља две праве које се секу и чије су једначине (23) и (24).

3. Једначина $P(t) = 0$ нема решења.

3.1. Ако $a_3 \neq 0$, једначина (5) представља елипсу (специјални случајеви: круг, тачка) или празан скуп тачака.

3.2. Ако $a_3 = 0$, $b_2 \neq 0$, једначина (5) представља параболу.

3.3. Ако $a_3 = b_2 = 0$, једначина (5) представља две вертикалне паралелне праве, једну вертикалну праву или празан скуп тачака.

8. Сличан поступак може се применити и на тражење асимптота криве линије $F(x,y) = 0$, где је $F(x,y)$ полином по x и y степена вишег од 2. Наиме, асимптоте облика $y = kx + n$ тражимо тако што једначину $F(x, kx+n) = 0$ средимо и напишемо у облику полинома по x, а затим изједначимо са нулом прво најстарији коефицијент, затим следећи, итд. и успут разматрамо могућне случајеве. Тако, на пример, ако је $F(x,y)$ полином степена 3, тј. ако имамо једначину

$$a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3 + b_1x^2 + b_2xy + b_3y^2 + c_1x + c_2y + d = 0, \tag{26}$$

где је $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 > 0$, тада, стављајући $y = kx + n$, добијамо

$$P(k)x^3 + (P'(k)n + Q(k))x^2 + (\tfrac{1}{2}P''(k)n^2 + Q'(k)n + R(k))x + S(n) = 0, \tag{27}$$

где је

$$P(t) = a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3, \qquad Q(t) = b_1 + b_2t + b_3t^2,$$
$$R(t) = c_1 + c_2t, \qquad S(t) = a_4t^3 + b_3t^2 + c_2t + d$$

и можемо извршити детаљну анализу, сличну оној коју смо извршили у случају када је $F(x,y)$ полином степена 2. Рецимо, важе следећи закључци:

(i) Ако постоји реалан број α такав да је $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) \neq 0$, крива (26) има асимптоту $y = \alpha x - \dfrac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}$, под условом

$$\frac{1}{2}P''(\alpha)\Big(\frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}\Big)^2 - Q'(\alpha)\frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)} + R(\alpha) \neq 0 \quad \text{или} \quad S\Big(-\frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}\Big) \neq 0.$$

(ii) Ако постоји реалан број α такав да је $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$, $Q(\alpha) \neq 0$, крива (26) нема асимптоту облика (2).

(iii) Ако постоје реални бројеви α и β такви да је $P(\alpha) = P'(\alpha) = Q(\alpha) = 0$, $\frac{1}{2}P''(\alpha)\beta^2 + Q'(\alpha)\beta + R(\alpha) = 0$, $S(\beta) \neq 0$, крива (26) има асимптоту $y = \alpha x + \beta$.

(iv) Ако постоји реалан број α такав да је $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = Q(\alpha) = 0$, $Q'(\alpha) \neq 0$, крива (26) има асимптоту $y = \alpha x - \dfrac{R(\alpha)}{Q'(\alpha)}$, под условом да је $S\Big(-\dfrac{R(\alpha)}{Q'(\alpha)}\Big) \neq 0$.

Ово су били само неки од могућних закључака у вези са једначином (26). Нећемо се упуштати у детаљну анализу случајева кад је $F(x, y)$ полином вишег степена од 2, јер се ствари прилично компликују, па таква анализа постаје беспредметна. Уместо тога, урадићемо неколико примера.

Пример 6. Крива

$$2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 + 4x^2 + xy - 5y^2 + 3x + 3y = 0 \tag{28}$$

нема асимптоту облика $x = \lambda$. Из једначине (28) и $y = kx + n$ добијамо, после сређивања, једначину (27), где је

$$P(t) = 2 - t - 2t^2 + t^3,\ Q(t) = 4 + t - 5t^2,\ R(t) = 3 + 3t,\ S(t) = t^3 - 5t^2 + 3t.$$

Решавајући једначину $P(k) = 0$ налазимо: $k = 1$, $k = -1$ или $k = 2$. За нађене вредности k, из једначине $P'(k)n + Q(k) = 0$ добијамо редом $n = 0$, $n = 1/3$, односно $n = 14/3$, што значи да су парови $(1, 0)$, $(-1, 1/3)$, $(2, 14/3)$ решења система једначина $P(k) = 0$, $P'(k)n + Q(n) = 0$. При томе, за први пар је $\frac{1}{2}P''(k)n^2 + Q'(k)n + R(k) = R(1) = 6 \neq 0$, за други пар имамо $S(1/3) = 13/27 \neq 0$, а за трећи $S(14/3) = 182/27 \neq 0$. Према томе, крива (28) има три асимптоте:

$$y = x, \quad y = -x + \frac{1}{3}, \quad y = 2x + \frac{14}{3}.$$

Пример 7. Ставимо $x = \lambda$ у једначину

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 - 4y = 0. \tag{29}$$

Добијамо $\lambda y^2 - (2\lambda^2 + 4)y + \lambda^3 = 0$, и крива (29) има вертикалну асимптоту $x = 0$. Полиноми P, Q, R, S за ову једначину су:

$$P(t) = 1 - 2t + t^2, \quad Q(t) = 0, \quad R(t) = -4t, \quad S(t) = -4t.$$

Из једначине $P(k) = 0$ добијамо $k = 1$. Једначина $P'(k)n + Q(k) = 0$ за $k = 1$ постаје $0 = 0$. Једначина $\frac{1}{2}P''(k)n^2 + Q'(k)n + R(k) = 0$ за $k = 1$ постаје $n^2 - 4 = 0$ и има решења 2 и -2. Како је $S(2) \neq 0$, $S(-2) \neq 0$, закључујемо да крива (29) има три асимптоте:

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = x - 2.$$

Пример 8. Ако ставимо $y = kx + n$ у једначину

$$2x^4 - 5x^3y + 4x^2y^2 - xy^3 - x^3 + 2x^2y - xy^2 - 8xy + 4y^2 + 4y = 0, \tag{30}$$

после сређивања добијамо

$$\begin{aligned}(2 - 5k + 4k^2 - k^3)x^4 &- (-5n + 8kn - 3k^2n - 1 + 2k - k^2)x^3 \\ &+ (4n^2 - 3kn^2 + 2n - 2kn - 8k + 4k^2)x^2 \\ &\qquad + (-n^3 - n^2 - 8n + 8kn + 4k)x + 4n^2 + 4n = 0.\end{aligned} \tag{31}$$

Како је $2-5k+4k^2-k^3=(2-k)(k-1)^2$, једначина $2-5k+4k^2-k^3=0$ има решења 2 и 1. За $k=2$ из једначине $-5n+8kn-3k^2n-1+2k-k^2=0$ добијамо $n=-1$. Међутим, за $k=2$, $n=-1$, коефицијенти уз x^2, x и слободан члан у (31) једнаки су 0. То значи да је полином на левој страни једначине (30) дељив полиномом $y-2x+1$, и заиста имамо

$$\begin{aligned}2x^4-5x^3y+4x^2y^2-xy^3-x^3+2x^2y-xy^2-8xy+4y^2+4y&\\ =(2x-y-1)(x^3-2x^2y+xy^2-4y)&\end{aligned}$$

па су једначином (30) представљене права $2x-y-1=0$ и крива $x^3-2x^2y+xy^2-4y=0$ чије смо асимптоте одредили у претходном примеру.

Пример 9. Крива

$$x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3-x^3+2y^3-2x+y+1=0$$

има две асимптоте: $x=2$ и $y=x+\frac{1}{2}$. Проверити.

Пример 10. Крива чија је једначина

$$15x^4y-8x^3y^2+x^2y^3-3xy^3+2y^3+x=0 \tag{32}$$

има пет асимптота: $x=1$, $x=2$, $y=0$, $2y=6x+27$, $2y=10x+75$. Проверити.

9. Одређивање асимптота криве линије $F(x,y)=0$, где је $F(x,y)$ полином по x, y разматрано је у многим уџбеницима (наводимо, рецимо, књиге [1] и [2]). Међутим, методи употребљени у тим уџбеницима знатно су сложенији од метода изложеног у овом чланку.

Примера ради, ево како се у књизи [2] одређује асимптота криве линије

$$x^3+y^3-3xy=0, \tag{33}$$

познате под именом Декартов лист. Текст који следи дослован је превод из поменуте књиге.

Крива (33) има асимптоту $x+y+1=0$ и кад $x\to+\infty$ и кад $x\to-\infty$. Да бисмо се уверили у то, поделимо сваки члан дате једначине са x^3:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3=3\,\frac{y}{x}\,\frac{1}{x}-1.$$

Одатле, пре свега, можемо закључити да рецимо за $|x|>3$, $|y/x|$ остаје ограничено, а затим је такође јасно да за $x\to\pm\infty$ важи релација $y/x\to-1$. С друге стране, једначина даје

$$y+x=\frac{3xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{3\,\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},$$

па за $x\to\pm\infty$, биће $y+x\to-1$. Тиме је наше тврђење оправдано. Крај превода.

Метод изложен у овом чланку доводи до релација

$$1+k^3=0,\quad 3k^2n-3k=0,\quad 3kn^2-3n\neq0\quad\text{или}\quad n^3\neq0,$$

одакле лако (и без граничних процеса) добијамо $k=-1$, $n=-1$, тј. асимптоту $y=-x-1$.

10. Метод за одређивање асимптота предложен у овом чланку ефикасан је, у смислу да брже и једноставније доводи до тачног резултата (сви наведени примери узети су из постојећих уџбеника). Метод дакле „ради“, али питање је на основу чега? Изузев аналогије са хиперболом (1) и њеним од раније познатим асимптотама (на коју смо указали при крају првог одељка) нисмо дали никакво друго оправдање за изложени поступак.

Покушаћемо сада да дамо једно објашњење којим се колико-толико оправдава изложени метод. Објашњење ће наравно бити више интуитивно него формално, слично као што је раније био тумачен појам тангенте, односно асимптоте.

Размотримо прво случај вертикалних асимптота. Шта значи да крива $F(x,y)=0$ има асимптоту $x=\lambda$? То значи да $|y|$ постаје све веће и веће кад се x све више и више приближава броју λ. Међутим, то такође значи да ако крива $F(x,y)=0$ има асимптоту $x=\lambda$, онда једначина $F(\lambda,y)=0$, која се добија из система једначина $F(x,y)=0$, $x=\lambda$, не сме да буде у граничном случају бесмислена кад $|y|\to\infty$.

На пример, зашто крива (32) из Примера 10 има вертикалне асимптоте $x=1$ и $x=2$? Из система који сачињавају једначина (32) и једначина $x=\lambda$ добијамо, после сређивања по y,

$$(\lambda^2-3\lambda+2)y^3-8\lambda^2y^2+15\lambda^4y+\lambda=0, \tag{34}$$

одакле, после дељења са y^3 следи

$$\lambda^2-3\lambda+2-8\lambda^2\,\frac{1}{y}+15\lambda^4\,\frac{1}{y^2}+\lambda\,\frac{1}{y^3}=0. \tag{35}$$

И сада, када је y све веће и веће, онда су $1/y$, $1/y^2$ и $1/y^3$ све ближи и ближи броју 0, па једначина (35) постаје све ближа једначини $\lambda^2-3\lambda+2=0$, одакле је $\lambda=1$ или $\lambda=2$. Према томе, вертикалне асимптоте криве (32) су $x=1$ и $x=2$.

Зашто крива

$$x^2-2xy+y^2-x=0 \tag{36}$$

нема вертикалну асимптоту? Зато што из система који сачињавају једначина (36) и једначина $x=\lambda$ добијамо

$$y^2-2\lambda y+\lambda^2-\lambda=0,$$

односно, после дељења са y^2:

$$1-2\lambda\,\frac{1}{y}+(\lambda^2-\lambda)\,\frac{1}{y^2}=0, \tag{37}$$

и кад је $|y|$ све веће и веће, једначина (37) постаје све ближа и ближа бесмисленој једначини $1=0$.

Слична прича важи и за асимптоте облика $y=kx+n$. Наиме, ако крива $F(x,y)=0$ има асимптоту $y=kx+n$, то значи да што је $|x|$ веће и веће, крива

$F(x,y)=0$ се све више и више приближава правој $y=kx+n$. То даље значи да једначина $F(x,kx+n)=0$ не сме да буде бесмислена кад је $|x|$ све веће и веће.

Илуструјмо ово на примеру Декартовог листа, криве чија је једначина (33). Из (33) и $y=kx+n$ добијамо

$$(1+k^3)x^3+(3k^2n-3k)x^2+(3kn^2-3n)x+n^3=0, \tag{38}$$

и после дељења са x^3:

$$1+k^3+(3k^2n-3k)\,\frac{1}{x}+(3kn^2-3n)\,\frac{1}{x^2}+n^3\,\frac{1}{x^3}=0. \tag{39}$$

Кад је $|x|$ све веће и веће, онда се $1/x$, $1/x^2$ и $1/x^3$ све више и више приближавају нули, и једначина (39) се све више приближава једначини $1+k^3=0$, тј. $k=-1$. Сада, за $k=-1$, једначина (38) постаје

$$(3n+3)x^2+(-3n^2-3n)x+n^3=0,$$

односно после дељења са x^2:

$$3n+3-(3n^2+3n)\,\frac{1}{x}+n^3\,\frac{1}{x^2}=0,$$

а ова последња једначина кад је $|x|$ све веће и веће све више се ближи једначини $3n+3=0$, тј. $n=-1$.

Зашто крива (36) нема асимптоту облика $y=kx+n$? Зато што из система који сачињавају (36) и $y=kx+n$ добијамо

$$(1-2k+k^2)x^2+(2kn-2n-1)x+n^2=0, \tag{40}$$

односно после дељења са x^2:

$$1-2k+k^2+(2kn-2n-1)\,\frac{1}{x}+n^2\,\frac{1}{x^2}=0, \tag{41}$$

па кад је $|x|$ све веће, једначина (41) постаје све ближа једначини $1-2k+k^2=0$, тј. $k=1$. Међутим, за $k=1$, (40) постаје: $-x+n^2=0$, и после дељења са x: $-1+n^2\,\frac{1}{x}=0$, и видимо да кад је $|x|$ све веће, ова последња једначина је све ближа бесмисленој једначини $-1=0$.

Напомена 7. Као што је раније речено, ово је било само интуитивно објашњење, свакако не и доказ, зашто асимптоте можемо тражити изложеним методом. Наравно, могу се ставити разне примедбе на то објашњење. Можда највише „боде очи“ то што смо се у случају криве (32) задовољили тиме да само коефицијент уз y^3 у једначини (34) изједначимо са нулом, док у случају криве (36) изједначујемо и коефицијент уз x^2 и коефицијент уз x у једначини (40) са нулом. И то се може објаснити, али уз дубље улажење у апроксимативне методе, што нам овде није циљ. Утехе ради, приметимо да ни „оправдање“ у вези са асимптотом Декартовог листа, преведено из уџбеника [2], није баш сасвим „чисто“.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E. A. Maxwell, *An Analytical Calculus, Vol. 3*, Cambridge 1962.

[2] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления, том I*, Москва 1969.