НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2001, XLVI, 3–4, стр. 1–8

Војислав Пантић

ЛУИС КЕРОЛ – АЛТЕР ЕГО МАТЕМАТИЧАРА

> „Ако поједем неки од ових колача“, мислила је (Алиса), „сигурно ће се нешто променити у мојој величини. А пошто не могу да будем већа ... смањиваћу се, претпостављам.“
>
> „Алиса у замљи чуда“, Луис Керол
> „Увод у геометрију“, Х. С. М. Коксетер

„Каква дивна прилика за илустрацију хомотетије!“, узвикнуо је, можда, Х. С. М. Коксетер, еминентни професор геометрије са Универзитета у Торонту, па онда још девет пута у истом уџбенику цитирао славног дечјег писца (пре одељака о подели круга, изометријама, реалним бројевима, ...). Нимало случајно!

Луис Керол рођен је као Чарлс Лутвиџ Доџсон у парохији Дејрсбери (област Чешир, Енглеска), 27. јануара 1832. године. Треће од једанаесторо деце Чарлса Доџсона и његове сестре од тетке Френсис Џејн Лутвиџ, претпоставља се да је патио од муцања – као и већина његове браће и сестара – због крвног сродства родитеља.

Породица је припадала средњој класи Викторијанског друштва. Генерације Доџсонових служиле су цркви: Чарлсов отац био је парохијски жупник, а прадеда Елфински бискуп. Наш јунак је такође изабрао црквену службу, али није постао свештеник, вероватно због проблема са муцањем. Двадесетједну миљу удаљено од Ливерпула, мало село је било окружено бујном природом, а млади Доџсон је – у одсуству већег броја деце – проналазио занимацију у игрању са пужевима и жабама крастачама, чега ће се добро сећати када, тридесет година касније, буде описивао Алисине авантуре. Прве лекције из латинског, математике, класичне и енглеске литературе добија од оца, који је тешко излазио на крај са дечаковом радозналошћу. Очев премештај у Крофт (Јоркшир) прија 11-годишњем Чарлсу, који дане проводи забављајући пролазнике на градском тргу. Најпре се школује у оближњем Ричмонду („Младић поседује неуобичајене особине генијалности“, писао је породици управник Џ. Тејт) а на четрнаести рођендан одлази у Рагби, где га је очекивао посебно строг режим наставе из класике, Светог писма, историје, математике и француског језика. О испољавању посебне склоности за математику, сведочио је професор Р. Б. Мејџор: „Нисам имао овако обећавајућег дечака од свог доласка у Рагби.“

Саопштено на Републичком семинару о настави математике, Београд, јануара 2000.

Али, упркос високог реномеа школе, млади Доџсон није био задовољан. Двадесеттрећег маја 1850. године обилази Оксфорд: одушевљен оним што је тамо затекао, представља се цензору и вицеректору Христове школе, поклања статуама Универзитета и потписује тзв. „39 Артикала“ – званичну вероисповест Енглеске цркве. У јануару следеће године, започиње школовање у новој средини. Три године касније стиче звање дипломираног студента филозофије, прима I награду из математике и II награду из физике, па прихвата различите послове: најпре држи приватне часове из математике, затим преузима посао библиотекара, а у септембру 1855. године постаје предавач математике у Христовој школи. Заслужује и Бошточку стипендију, чиме стиче довољно новца да живи неовисно од помоћи родитеља. Сведоци су тврдили да је био успешнији у индивидуалном раду, јер је пред већим скупом студената тешко превазилазио стидљивост и обуздавао муцање. Често предмет исмејавања, повлачио се у себе, почео да пише и објављује комичне приче и носталгичне поеме (под псеудонимом Луис Керол), а пријатеље тражио међу децом – посебно женском – која нису марила *како*, већ *шта* говори.

Четвртог јула 1862. године, Доџсон одлази на поподневно једрење са ћеркама декана школе Лидела. У маленој Алиси Лидел, он је тог поподнева пронашао надахнуће за причу о Алиси из маште која – пропадајући кроз рупу у земљи у потрази за белим зецом – доспева у Земљу чуда. Упркос великом успеху „*Алисе у земљи чуда*“ (1865), Доџсон не напушта математику – све до смрти објављиваће паралелно и математичке текстове, али и у својим романима, причама и поемама веома често тражи инспирацију у математици. Колико је интензиван био креативни сукоб математичара Доџсона и (дечјег) писца Керола, најбоље сведочи анегдота о краљици Викторији, која је – одушевљена Алисиним догодовштинама – замолила писца да јој посвети следећу књигу. На ову молбу позитивно је одговорио математичар, 1867. године пославши збуњеној краљици „*Елементарни третман детерминанти*“.

Међу Кероловим књижевним делима, са математичког становишта занимљив је наставак Алисиних авантура „*Алиса иза огледала*“ (1872), у коме ће геометри пронаћи шармантну потпору за причу о симетрији, односно „*Замршена прича*“ (1885) – збирка догодовштина два витеза, Махните Матезе, Њеног Зрачанства и Гувернера Кговјнија инспирисаних Алисиним узвиком „Чвор! Ох, дозволите да помогнем да се размрси“, које је Керол претходно објављивао у часопису „Месечне доставе“. „Намера пишчева“, објаснио је Керол у предговору, „била је да у сваки чвор задене по једно или више математичких питања – из Аритметике, Алгебре или Геометрије, како где буде – забаве ради, по могућности и уздизања млађаних читалаца овог магазина“. Посебно занимљиво јесте да је Керол исцрпно тумачио решења проблема која је добијао од читалаца, оцењујући њихову вредност искључиво уколико су садржала детаљна образлагања примењених математичких поступака.

Међу математичким радовима, интересантне су две свеске „*Curiosa Mathematica*“ (1888/93), у којима се налазе „*Проблеми пред спавање*“, као и два трактата из логике – „*Игра логике*“ (1887) и „*Симболичка логика*“ (1896). Озбиљан научни рад није га занимао. Поред преданог састављања задатака за математичку разбибригу, зауставио се на писању практикума за своје студенте – водича/приручника за одређену материју (алгебра, геометрија, тригонометрија). Историјски значај има књига „*Еуклид и његови модерни ривали*“ (1879), у којој је у форми драме описан сукоб концепција у излагању Геометрије, који је био актуелан у другој половини XIX века. Пред смрт, 1897. године, објављује тачан тест дељивости целог броја са 11[1]. Из почасти према Керолу, на стогодишњицу његове смрти путем електронске мреже је организован конкурс за најефектније програмско решење овог проблема, тј. симулацију овог поступка.

И његови хобији снажно су повезани са математиком. Био је један од пионира аматерске фотографије у Великој Британији – геометријски инстинкт учинио је да његови радови поседују супериорни композициони склад у поређењу са савременицима. Године 1883, полемише на тему куп система на тениским турнирима, излажући и потом логички образлажући систем који учесницима пружа далеко „поштеније“ услове од класичног елиминационог принципа. Године 1890. смишља правила за билијар на кружном столу – изванредно необичан пример примене принципа осне симетрије! Био је и велики љубитељ танграма – слагања фигура од седам полигона који разлажу квадрат. Поседовао је кинеску књигу на свили са 323 танграм фигуре – ово занимање у директној је спрези са теоријом (правилне) поделе равни (или произвољних површи), чији развој коинцидира са последњим годинама Доџсоновог живота, а чији ће водећи инспиратори у математици (Коксетер) и уметности (Мориц Корнелис Ешер) бити велики љубитељи Кероловог дела.

А) Проблеми из замршене приче

1. Око трга квадратног облика су станови – по 20 врата на свакој страни деле те стране на по 21 једнаки део. Врата су нумерисана циклично, почев од једног међу угловима, па дуж целе те стране, итд. Од којих међу вратима са бројевима 9, 25, 52, 73 је збир растојања до остало троје врата најмањи?

2. (а) Две путнице, кренувши у истом часу са исте станице, возиле су се цео круг кружном железницом у супротним смеровима. Возови у оба смера крећу на сваких 15 минута, с тим што они који крећу пут истока прођу цео круг за три, а они који крећу пут запада за два сата. Колико је возова свака од њих срела? (б) Возиле су се оне на исти начин, али су почеле да броје тек када су прошле поред воза у ком се налази „она друга“. Колико је возова свака од њих избројала?

3. Ако је 70% Челсишких пензионера изгубило око, 75% ухо, 80% руку, а 85% ногу, који најмањи проценат пензионера има сва четири недостатка?

4. Једном се погодило да збир година двојице браће буде једнак узрасту трећег. Пар година касније, двојица међу њима у збиру имају два пута више

[1] Док број који тестирамо има више од две цифре, правимо од њега нови број за тестирање тако што: (а) избришемо цифру јединица и (б) одузмемо је од „скраћеног“ броја. Почетни број је дељив са 11 ако и само ако је двоцифрени број (као и сви „међубројеви“) добијен овим поступком дељив са 11

година од трећег. Када број година од првог догађаја достигне две трећине збира година које су укупно онда имали, један од њих има 21 годину. Колико година имају друга двојица?

B) Проблеми пред спавање[2]

1. Заточена краљица, њен син и кћи налазе се у соби на врху високе куле. Изнад прозора, са спољне стране, обешен је котур око кога је пребачен конопац, на чија су оба краја везане корпе. Троје заточених планирају да побегну уз помоћ овог механизма и тега који су нашли у соби. Када једна корпа иде доле, друга – природно – иде горе. Опасно би било да се људи спуштају у корпи која би тежила преко 15 либри више од оне која се диже (јер би се превише нагло спуштали, што није безбедно). Краљица тежи 195, кћи 105, син 90, а тег 75 либри. Како да побегну?

2. (а) Да ли увек дуплирање суме два квадрата (целих бројева) представља суму два квадрата целих бројева? (б) Да ли триплирање суме три квадрата целих бројева представља суму четири квадрата целих бројева?

3. Конопац без тежине, савршено флексибилан, пребачен је о котур без тежине, обешен на крову зграде. Међу њима нема трења. На једном крају конопца виси мајмун у равнотежи са тегом који је привезан за други крај конопца. Ако мајмун почне да се пење, шта ће се десити са тегом? Да ли ће остати у истој позицији према земљи, или ће се приближити, или, пак, удаљити од земље?

C) Проблеми инспирисани Алисиним догодовштинама

1. („Алиса у Земљи чуда" – карте боје руже у црвено) Имаш дрвене коцке и шест кантица са различитим бојама. На колико је различитих начина могуће обојити стране коцке (1 страна = 1 боја)? Сматра се да су две коцке различито обојене ако их окретањем није могуће довести у „визуелну кореспонденцију" (исто обојене „одозго", „лево", „напред", итд.).

2. („Алиса иза огледала" – сусрет Два дедака) Твидл Дум и Твидл Ди уштедели су извесну количину златника исте вредности. Ди је извршио расподелу, али то није правично урадио. Ево њиховог разговора:

Дум: „Твоја гомила има бар десет златника више од моје!"[3]

Ди: „Истина. Дајем ти једну трећину моје гомиле."

Дум: „Сад је код мене више. Ево ти пола моје гомиле."

Ди: „Превише си ми дао. Ево ја ти сада нудим моје две трећине."

Дум: „Да, али сад могу да те почастим са моје три четвртине."

Ди: „ … и опет имам више. Ево ти поново две трећине моје гомиле."

[2] Керол је препоручивао ове задатке не само као „пријатну диверзију" за „бесани кауч", већ и као „начин да се избаце скептичне мисли, бласфемичне и несвете мисли, које са мржњом муче машту, која би иначе требало да буде чиста".

[3] У оригиналном тексту овде стоји: „Твоја гомила је већа од моје." Али, тада овај задатак нема јединствено решење. Пробајте и са овом изменом, налазећи два могућа решења.

Дум: „И сада ћу ти узвратити, али ... само са трећином.“

Ди: „У реду. Па сад ако ти дам један златник, мислим да ћемо се изравнати!“

Био је у праву. Колико су златника делили?

3. („Алиса у Земљи чуда“ – доручак са Лудим шеширџијом и Мартовским кунићем) Имаш часовник код кога пуне сате означавају исти показивачи, а казаљке су једнаке дужине. Нађи време између шест и седам када би се исто време читало и гледајући сат у огледалу.

Решења

А2. (а) Воз који креће пут истока (у даљем тексту: Источни воз) обиђе круг за 180 минута, а воз који креће пут запада (у даљем тексту: Западни воз) за 120 минута. Нека је кружни пут подељен на $\mathrm{NZS}(180, 120) = 360$ једнаких делова (у даљем тексту „јединица“). Источни возови прелазе 2 јединице у минуту, а Западни возови 3 јединице у минуту. У моменту када наше путнице крену са станице, Источни воз са једном од путница налази се на 15 (минута) $\times 3$ (јединице) $= 45$ јединица од воза који – обилазећи кружни пут у другом смеру – први стиже у почетну станицу (и први се међу таквим возовима мимоилази са возом у ком је путница која се вози Источним возом). До тренутка сусрета ова два воза путују n минута, при чему је $3n + 2n = 45$ ($2n$ је број јединица који прелази Источни, а $3n$ број јединица који прелази Западни воз). Одавде $n = 9$, што значи да је путница у Источном возу до првог мимоилажења са неким Западним возом прешла $2 \times 9 = 18$ јединица пута. Пут укупно има 360 јединица, што значи да је она прошла поред $360 : 18 = 20$ возова. Истим резоном пребројавајући, добија се $15 \times 2 = 30$ јединица које путницу у Западном возу деле до најближег Источног воза, а до сусрета је дели $3m$ минута, $3m + 2m = 30$. Дакле, она се мимоилази са Источним возом на сваких $3 \times 6 = 18$ јединица пута, што значи да ће се укупно мимоићи са истим бројем возова као њена пријатељица!

(б) Путнице почињу да броје тек када виде „ону другу“, а до тада су већ путовале t минута, заједно обишавши пун круг: $3t + 2t = 360$. Одавде је $t = 72$, што значи да је путница у Источном возу прешла 144, а путница у Западном возу 216 јединица. Током преосталог путовања прва ће срести $216 : 18 = 12$ возова, а друга $144 : 18 = 8$ возова (или 13 и 9 возова, ако као први воз који срећу броје воз „оне друге“).

Б1. Пре свега, јасно је да у корпи која се спушта мора бити тежи садржај од корпе која се диже, да би се механизам уопште покренуо. Следеће чињенице следе непосредно из услова задатка:

(а) Сво четворо (три особе и тег) не могу одједном *доле*, очигледно.

(б) Никоје троје такође не могу *доле* истом корпом, из разлога безбедног спуштања двоје људи који се налазе у њој. (У најбољем случају $(105 + 90 + 75) - 195 > 15$). Не могу ни *горе* јер произвољна три терета су нужно тежа од четвртог, па се механизам не би покренуо.

(в) Краљица са куле мора да сиђе сама – јер та корпа иначе драстично претеже могући садржај друге корпе. (У најбољем случају $(195+75)-(105+90)>15$.) Једина могућност да она безбедно сиђе је када се другом корпом пењу кћи и тег. (Иначе друга корпа претеже, или није довољно тешка да се краљица безбедно спусти.) Када се једном спусти, краљица не може поново горе, јер друга корпа или није довољно тешка, или је претешка за безбедно спуштање неке особе.

(г) Никоје двоје не могу заједно *доле.* Осим пара са краљицом (који је већ размотрен под (в)), могуће је спуштати сина и кћер ($105+90=195$ либри), кћер и тег ($105+75=180$ либри) и сина и тег ($90+75=165$ либри). Али, ни у једном од ових случајева у другој корпи се не може направити таква („лакша") комбинација да спуштање пара са живом особом буде безбедно.

(д) Сам *доле* може једино тег, на чију се безбедност не треба обазирати.

Из претходно наведеног, јасно је да краљица једино може доле ако се пре тога спусте кћи и тег. Да би се кћи спустила (сама), у другој корпи мора бити син. А да би се син спустио (сам, наравно) у другој корпи мора бити тег. Редослед потеза је, дакле, следећи:

1) Тег се спушта *доле.*

2) Силази син, а тег иде *горе.*

3) Силази кћи, а син иде *горе.*

4) Треба припремити ктаљичино спуштање, стога се тег опет спушта *доле.*

5) Спушта се краљица, у другој корпи су кћи и тег.

6) Краљица остаје *доле.* Да би се *доле* спустила и кћи, претходно мора да се спусти син – тег опет иде (сам) *доле.*

7) Као 2).

8) Као 3).

9) Краљица и кћи су *доле*, а син и тег *горе.* Али, син је већ два пута ишао доле без „помоћи" маме и сестре: он поново спушта тег.

10) Син се придружује мами и сестри, помоћу тега у другој корпи.

Ово је једини начин да краљевска породица безбедно побегне из куле!

С3. Пошто су сви подеоци на сату обележени једнаким показивачима и без бројева, назовимо, дискусије ради, подеок на који показује минутна казаљка у пуним сатима „0-тим подеоком", па онда редом остале – првим, другим, итд. 11-тим подеоком на сату. Треба да или (1) слика сатне казаљке у огледалу поново показује сате, а слика минутне казаљке минуте, или (што је могуће због једнаких дужина казаљки) (2) слика сатне казаљке у огледалу показује минуте, а слика минутне казаљке сате.

(1) У првом случају, сатна казаљка је у 6 сати на шестом подеоку и у збиљи и у огледалу, а минутна казаљка на 0-том подеоку и у збиљи и у огледалу. То је и једина могућност, јер потом се сатна казаљка у збиљи налази између шестог и седмог подеока, а у огледалу нам показује време између 5 и 6.

(2) У другом случају, желимо да слика сатне казаљке у збиљи представља минутну казаљку у огледалу и обрнуто. У огледалу слика сатне казаљке прелази

пут од 6-тог до 5-тог подеока, док она у збиљи показује време између 6 и 7, што значи да желимо да се у збиљи минутна казаљка нађе између 5-тог и 6-тог подеока, а то значи да у збиљи покаже време између 6 сати и 25 минута и пола седам. Прецизније време можемо одредити превођењем кретања казаљки у времену на линеарну зависност пређеног угла у функцији протеклог времена и решавање једног система од две линеарне једначине са две непознате.

Нека је α угао који направи слика сатне казаљке, а β угао који направи минутна казаљка у збиљи. Тада је $\gamma = 180^\circ - \beta$ угао између ње и 6-тог подеока (и у збиљи и у огледалу). Желимо да буде $\gamma = \alpha$. Зависност угла од протеклог времена је линеарна: $y = kx + m$, при чему x означава време (у минутима), а y угао између казаљке и 6-тог подеока.

У случају слике сатне казаљке, $\alpha = 0^\circ$ у 6 сати (тј. после 0 минута), а $\alpha = 15^\circ$ у пола седам (тј. после 30 минута). Другим речима:

$$\begin{aligned} 0 &= k \cdot 0 + m \\ 15 &= k \cdot 30 + m. \end{aligned}$$

Решавајући систем, добијамо $k = \dfrac{1}{2}$, $m = 0$, односно функцију $y = \dfrac{1}{2}x$, за угао α.

Аналогно, у случају минутне казаљке, $\beta = 0^\circ$ у 6 сати, а $\beta = 180^\circ$ у пола седам, одакле $\gamma = 180^\circ$ у 6 сати (после 0 минута), а $\gamma = 0^\circ$ у пола седам (после 30 минута). Другим речима:

$$\begin{aligned} 180 &= k \cdot 0 + m \\ 0 &= k \cdot 30 + m. \end{aligned}$$

Решавајући систем, добијамо $k = -6$, $m = 180$, односно функцију $y = -6x + 180$, за угао γ. Изједначавањем функција по y, добијамо x минута после којих је $\alpha = \gamma$:

$$\alpha = \frac{1}{2}x = -6x + 180 = \gamma, \quad \text{тј.} \quad x = \frac{360}{13} \approx 27.7 \text{ (минута)}.$$

Тражено време је, дакле, нешто пре 6 сати и 28 минута.

Још неке занимљивости

Нерешив проблем! Један од ретких задатака објављених у „Месечним доставама“ на које Керол није добио одговор гласи: „Особе A и B отпочеле су годину са само 1000 фунти по глави. Узајмили нису ни трун; украли нису ни трун. На дан следеће Нове године, нашло се између њих 60 хиљада фунти. Како су то постигли?“ (Одговор нема везе са математиком, али је логичан: покушајте да сами смислите разумно решење!)

Професор шаљивџија. Шестог фебруара 1868. године, докони професор Доџсон шаље управи Христове школе писмо потписано псеудонимом „Mathematicus“, у ком даје низ шаљивих предлога којима би се студентима омогућило успешније усвајање градива из математике:

(а) да се обезбеди *велика* соба за рачунање *највећег* заједничког делиоца и *мала* соба за рачунање *најмањег* заједничког садржаоца;

(б) да се у дворишту установи парче земље за *вађење* и *чување корена*, при чему посебну пажњу треба обратити на квадратне корене, због „јаких“ углова квадрата (?);

(в) да се обезбеди соба за скраћивање разломака, са подрумом за *складиштење* несводљивих међу њима, а тај подрум онда препоручити студентима за *чување* резултата, уопште;

(г) да се обезбеди мрачна соба са чаробном лампом за *истраживање* периодичних децималних записа;

(д) да се у дворишту ослободи уска трака земље за проверу да ли се паралелне праве секу или не (продужавајући их „у недоглед“, речником Еуклида);

(ђ) да се обезбеди фотографска соба за *снимање* алгебарског уместо људског *израза*.

Керол на интернету. На интернету је могуће пронаћи низ занимљивих информација о животу и раду Луиса Керола – међу 25 000 сајтова који се на претраживачу `altavista` „одазива“ на „lewis carroll“ постоји скоро 2000 сајтова у којима се третира Кероловдопринос математици. Посебно је садржајан интернет сајт `www.lewiscarroll.org`, са ког је могуће отићи на већину важнијих линкова.

ОБАВЕШТЕЊЕ

РЕЗУЛТАТИ МЛАДИХ МАТЕМАТИЧАРА И ПРОГРАМЕРА НА МЕЂУНАРОДНИМ ТАКМИЧЕЊИМА 2001. ГОДИНЕ

XVIII Балканска математичка олимпијада за ученике средњих школа је одржана од 3. до 9. маја 2001. године у Београду. Екипа Југославије била је у саставу: *Владимир Лазић, Татјана Симчевић, Карола Месарош, Милан Кирћански*, ученици четвртог разреда Математичке гимназије у Београду, *Миливоје Лукић*, ученик трећег разреда исте гимназије и *Милан Радоњић*, ученик трећег разреда Прве крагујевачке гимназије. Они су освојили: Владимир Лазић, Миливоје Лукић и Татјана Симчевић — сребрне медаље, а Милан Кирћански, Карола Месарош и Милан Радоњић — бронзане медаље.

XLII Међународна математичка олимпијада је одржана од 3. до 15. јула 2001. године у Вашингтону. У нашој екипи *Милан Петковић*, ученик трећег разреда гимназије „Бора Станковић“ у Нишу, *Александар Суботић*, ученик четвртог разреда Математичке гимназије у Београду и *Јелена Милановић*, ученица другог разреда исте гимназије, заменили су Милана Кирћанског, Каролу Месарош и Милана Радоњића. Резултати наших такмичара: Владимир Лазић је освојио сребрну медаљу, а Миливоје Лукић, Татјана Симчевић и Александар Суботић бронзане медаље.