Бојан Марковић

НЕКИ ПРИМЈЕРИ НЕСТАНДАРДНИХ ЈЕДНАЧИНА

1. Размотримо експоненцијалну једначину са двије или више непознатих која се своди на облик

$$(*)\qquad (a_1^{f_1(x_1)} - b_1^{f_1'(x_1)})^2 + (a_2^{f_2(x_2)} - b_2^{f_2'(x_2)})^2 + \cdots + (a_n^{f_n(x_n)} - b_n^{f_n'(x_n)})^2 = 0,$$

осносно краће записано

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^{f_i(x_i)} - b_i^{f_i'(x_i)})^2 = 0,$$

гдје су a_i и b_i позитивни реални бројеви ($i = \overline{1,n}$), а $f_i(x_i)$ и $f_i'(x_i)$ изрази по x_i. Уз то је израз $f_i(x_i)$ облика

$$(**)\qquad \frac{c_i}{d_i}x_i + e_i \quad \text{или} \quad \frac{c_i}{d_i x_i + e_i} + h_i$$

а израз $f_i'(x_i)$ облика

$$(***)\qquad \frac{c_i'}{d_i'}x_i + e_i' \quad \text{или} \quad \frac{c_i'}{d_i' x_i + e_i'} + h_i'.$$

Још су c_i, d_i, c_i', d_i' реални бројеви различити од нуле, а e_i, e_i', h_i, h_i' реални бројеви. Уколико су горе наведени изрази облика $(**)$ или $(***)$, треба обратити пажњу на њихову област дефинисаности, тј. у $(**)$ $x_i \in \mathbf{R} \setminus \{-e_i/d_i\}$, а у $(***)$ $x_i \in \mathbf{R} \setminus \{-e_i'/d_i'\}$.

Једнакост $(*)$ је задовољена ако и само ако је сваки од сабирака на лијевој страни једнак нули. Одатле се једначина $(*)$ своди на конјункцију

$$a_1^{f_1(x_1)} = b_1^{f_1'(x_1)} \wedge a_2^{f_2(x_2)} = b_2^{f_2'(x_2)} \wedge \cdots \wedge a_n^{f_n(x_n)} = b_n^{f_n'(x_n)}.$$

Прије свега, сада ћемо посматрати могуће комбинације облика израза $f_i(x_i)$ и $f_i'(x_i)$ у оквиру једне заграде (видјети једнакост $(*)$).

Прва могућност. Нека је израз $f_i(x_i)$ облика $\dfrac{c_i}{d_i}x_i + e_i$, а израз $f_i'(x_i)$ облика $\dfrac{c_i'}{d_i'}x_i + e_i'$. Дакле, $a_i^{f_i(x_i)} = b_i^{f_i'(x_i)}$. С обзиром да су обје стране једнакости

Саопштено на 10. конгресу математичара Југославије, Београд, 21–24. јануар 2001.

позитивни бројеви, то је логаритмујемо за произвољну основу коју нећемо писати. Према томе, имамо да је

$$
\begin{aligned}
\log a_i^{f_i(x_i)} &= \log b_i^{f_i'(x_i)},\\
f_i(x_i)\log a_i &= f_i'(x_i)\log b_i,\\
\left(\frac{c_i}{d_i}x_i+e_i\right)\log a_i &= \left(\frac{c_i'}{d_i'}x_i+e_i'\right)\log b_i,\\
\frac{c_i}{d_i}x_i\log a_i-\frac{c_i'}{d_i'}x_i\log b_i &= e_i'\log b_i-e_i\log a_i,\\
\left(\log a_i^{\frac{c_i}{d_i}}-\log b_i^{\frac{c_i'}{d_i'}}\right)x_i &= \log b_i^{e_i'}-\log a_i^{e_i},\\
x_i &= \frac{\log\left[b_i^{e_i'}\Big/a_i^{e_i}\right]}{\log\left[a_i^{\frac{c_i}{d_i}}\Big/b_i^{\frac{c_i'}{d_i'}}\right]}.
\end{aligned}
$$

Друга могућност. Израз f_i је облика $\dfrac{c_i}{d_ix_i+e_i}+h_i$ и израз $f_i'(x_i)$ је облика $\dfrac{c_i'}{d_i'x_i+e_i'}+h_i'$. Тада је

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{c_i}{d_ix_i+e_i}+h_i\right)\log a_i=\left(\frac{c_i'}{d_i'x_i+e_i'}+h_i'\right)\log b_i,\\
c_i(d_i'x_i+e_i')\log a_i+h_i(d_ix_i+e_i)(d_i'x_i+e_i')\log a_i=\\
=c_i'(d_ix_i+e_i)\log b_i+h_i'(d_ix_i+e_i)(d_i'x_i+e_i')\log b_i,\\
c_id_i'x_i\log a_i+c_ie_i'\log a_i+d_id_i'h_ix_i^2\log a_i+(d_i'e_i+d_ie_i')h_ix_i\log a_i+e_ie_i'h_i\log a_i=\\
=c_i'd_ix_i\log b_i+c_i'e_i\log b_i+d_id_i'h_i'x_i^2\log b_i+(d_i'e_i+d_ie_i')h_i'x_i\log b_i+e_ie_i'h_i'\log b_i,\\
d_id_i'(h_i\log a_i-h_i'\log b_i)x_i^2+(c_id_i'\log a_i+c_i'd_i\log b_i)x_i+(d_i'e_i+d_ie_i')h_ix_i\log a_i-\\
-(d_i'e_i+d_ie_i')h_i'x_i\log b_i+(c_ie_i'+e_ie_i'h_i)\log a_i-(c_i'e_i+e_ie_i'h_i')\log b_i=0.
\end{gathered}
$$

Из овога произлази следеће:

$$
\begin{gathered}
x_i^2\log\left(\frac{{a_i}^{h_i}}{{b_i}^{h_i'}}\right)^{d_id_i'}+\left(\log(a_i^{c_id_i'}b_i^{c_i'd_i})+\log a_i^{(d_i'e_i+d_ie_i')h_i}-\log b_i^{(d_i'e_i+d_ie_i')h_i'}\right)x_i+\\
+\log\frac{a_i^{c_ie_i'+e_ie_i'h_i}}{b_i^{c_i'e_i+e_ie_i'h_i'}}=0,\\
x_i^2\log\left(\frac{{a_i}^{h_i}}{{b_i}^{h_i'}}\right)^{d_id_i'}+x_i\log\frac{a_i^{c_id_i'+(d_i'e_i+d_ie_i')h_i}b_i^{c_i'd_i}}{b_i^{(d_i'e_i+d_ie_i')h_i'}}+\log\frac{a_i^{c_ie_i'+e_ie_i'h_i}}{b_i^{c_i'e_i+e_ie_i'h_i'}}=0.
\end{gathered}
$$

У принципу добијена је квадратна једначина по x_i. Уколико је коефицијент уз квадратни члан једнак нули, онда се она своди на линеарну једначину по

x_i која се лако ријешава. Дакле, имамо посла са линеарном једначином по x_i уколико важи $a_i^{h_i} = b_i^{h'_i}$ (или $h_i = h'_i = 0$ или $a_i = b_i = 1$). У противном, приступамо ријешавању добијене квадратне једначине, па је

$$(x_i)_{1,2} = \frac{\log \dfrac{b_i^{(d'_i e_i + d_i e'_i)h'_i}}{a_i^{c_i d'_i + (d'_i e_i + d_i e'_i)h_i} b_i^{c'_i d_i}} \pm \sqrt{D_1}}{\log \left(\dfrac{a_i^{h_i}}{b_i^{h'_i}} \right)^{2 d_i d'_i}},$$

гдје је

$$D_1 = \log^2 \frac{a_i^{c_i d'_i + (d'_i e_i + d_i e'_i)h_i} b_i^{c'_i d_i}}{b_i^{(d'_i e_i + d_i e'_i)h'_i}} - \log \left(\frac{a_i^{h_i}}{b_i^{h'_i}} \right)^{4 d_i d'_i} \cdot \log \frac{a_i^{c_i e'_i + e_i e'_i h_i}}{b_i^{c'_i e_i + e_i e'_i h'_i}}.$$

Дакле, израз D_1 је дискриминанта квадратне једначине и мора бити ненегативан да би једначина имала реална решења.

Трећа могућност. Сада је израз $f_i(x_i)$ облика $\dfrac{c_i}{d_i} x_i + e_i$ а израз $f'_i(x_i)$ облика $\dfrac{c'_i}{d'_i x_i + e'_i} + h'_i$. Према томе, важи следеће:

$$\left(\frac{c_i}{d_i} x_i + e_i \right) \log a_i = \left(\frac{c'_i}{d'_i x_i + e'_i} + h'_i \right) \log b_i,$$

$$x_i \log a_i^{\frac{c_i}{d_i}} + \log a_i^{e_i} = \frac{c'_i}{d'_i x_i + e'_i} \log b_i + \log b_i^{h'_i},$$

$$(d'_i x_i^2 + e'_i x_i) \log a_i^{\frac{c_i}{d_i}} + (d'_i x_i + e'_i) \log a_i^{e_i} = \log b_i^{c'_i} + (d'_i x_i + e'_i) \log b_i^{h'_i},$$

$$x_i^2 \log a_i^{\frac{c_i d'_i}{d_i}} + x_i \log a_i^{\frac{c_i e'_i}{d_i} + d'_i e_i} + \log a_i^{e_i e'_i} = x_i \log b_i^{d'_i h'_i} + \log b_i^{c'_i + e'_i h'_i}.$$

Дакле,

$$x_i^2 \log a_i^{\frac{c_i d'_i}{d_i}} + x_i \log \frac{a_i^{\frac{c_i e'_i}{d_i} + d'_i e_i}}{b_i^{d'_i h'_i}} + \log \frac{a_i^{e_i e'_i}}{b_i^{c'_i + e'_i h'_i}} = 0.$$

За $a_i = 1$ наша једначина се своди на линеарну једначину по x_i. Стога, нека је $a_i \neq 1$. Имамо:

$$(x_i)_{1,2} = \frac{\log \dfrac{b_i^{d'_i h'_i}}{a_i^{\frac{c_i e'_i}{d_i} + d'_i e_i}} \pm \sqrt{D_2}}{\log a_i^{\frac{2 c_i d'_i}{d_i}}},$$

гдје је

$$D_2 = \log^2 \frac{a_i^{\frac{c_i e'_i}{d_i} + d'_i e_i}}{b_i^{d'_i h'_i}} - \log a_i^{\frac{4 c_i d'_i}{d_i}} \cdot \log \frac{a_i^{e_i e'_i}}{b_i^{c'_i + e'_i h'_i}}.$$

Да бисмо имали реалних коријена дискриминанта D_2 мора бити ненегативна.

Четврта могућност. Још преостаје да израз $f_i(x_i)$ буде облика $\dfrac{c_i}{d_i x_i + e_i} + h_i$ а израз $f_i'(x_i)$ облика $\dfrac{c_i'}{d_i'} x_i + e_i'$. Овај случај разматра се потпуно аналогно претходном.

Напомена. Проблем је уочити да ли се нека једначина може свести на облик $(*)$. То се постиже „лакшим и тежим трансформацијама“, односно за то не постоји нека стандардна техника, већ то обично радимо „такмичарским сналажењем“. Илуструјмо то следећим примјером.

Примјер. Одредити сва реална рјешења једначине

$$2^x + 3^{2y+1} + 3^{\frac{6}{x}} = (\sqrt{2})^{x+2} \cdot 27^{\frac{1}{x}} + 2\sqrt{3} \cdot 15^y - 25^y.$$

Рјешење. Дата једначина је дефинисана за све реалне вриједности непознатих x и y изузев за $x = 0$. Поступно је трансформишемо на следећи начин:

$$2^x + 3^{\frac{6}{x}} + 25^y + 3^{2y+1} = 2^{\frac{x}{2}+1} \cdot 3^{\frac{3}{x}} + 2 \cdot 3^{y+\frac{1}{2}} \cdot 5^y,$$

$$2^x - 2 \cdot 2^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{x}} + 3^{\frac{6}{x}} + 25^y - 2 \cdot 5^y \cdot 3^{y+\frac{1}{2}} + 3^{2y+1} = 0,$$

$$(1) \qquad \left(2^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{3}{x}}\right)^2 + \left(5^y - 3^{y+\frac{1}{2}}\right)^2 = 0.$$

Дакле, дату једначину смо трансформисали у облик $(*)$. Како су оба добијена сабирка (са лијеве стране једнакости (1)) ненегативна, то ће њихов збир бити нула ако и само ако су оба једнака нули. Одатле добијамо:

$$(2) \quad 2^{\frac{x}{2}} = 3^{\frac{3}{x}} \qquad \text{и} \qquad (3) \quad 5^y = 3^{y+\frac{1}{2}}.$$

С обзиром да су обје стране једначине (2) позитивни бројеви, то је логаритмујемо (за произвољну основу коју нећемо писати). Према томе, имамо да је:

$$\frac{x}{2}\log 2 = \frac{3}{x}\log 3, \qquad x^2 \log 2 = 6\log 3, \qquad x^2 = \frac{6\log 3}{\log 2},$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{6\log 3}{\log 2}}.$$

Даље, из једначине (3) добија се $\left(\dfrac{5}{3}\right)^y = 3^{\frac{1}{2}}$ и логаритмовањем:

$$y\log\frac{5}{3} = \frac{1}{2}\log 3, \qquad 2y(\log 5 - \log 3) = \log 3, \qquad y = \frac{\log 3}{2(\log 5 - \log 3)}.$$

Дакле, сва рјешења дате једначине дата су скупом

$$SR = \left\{ \left(\sqrt{\frac{6\log 3}{\log 2}}, \frac{\log 3}{2(\log 5 - \log 3)} \right), \left(-\sqrt{\frac{6\log 3}{\log 2}}, \frac{\log 3}{2(\log 5 - \log 3)} \right) \right\}.$$

Напомена. У једнакости (1) у првој загради се јавља наша трећа могућност, а у другој прва могућност.

2. Размотримо сада једначину са двије или више непознатих која се своди на облик

$$(a_1x_1^{2n_1}+b_1x_1^{n_1}+c_1)(a_2x_2^{2n_2}+b_2x_2^{n_2}+c_2)\cdots(a_mx_m^{2n_m}+b_mx_m^{n_m}+c_m)=d$$

или једноставније записано

$$\prod_{i=1}^{m}(a_ix_i^{2n_i}+b_ix_i^{n_i}+c_i)=d.$$

Нека су a_i, b_i и c_i дати реални бројеви $(i=\overline{1,m})$ и сем тога a_i су још позитивни. Једначину која се своди на дати облик рјешавамо на скупу $\mathbf{R}$ по непознатим x_i којих има m, гдје је m природан број већи од један. И n_i су такође природни бројеви. Нека је d реалан број који ће зависити на одређени начин од бројева a_i, b_i и c_i.

Канонизујмо триноме који се јављају у свакој од заграда у горе наведеном облику:

$$a_ix_i^{2n_i}+b_ix_i^{n_i}+c_i=a_i\left(x_i^{n_i}+\frac{b_i}{2a_i}\right)^2+\frac{4a_ic_i-b_i^2}{4a_i},\qquad a_i\in\mathbf{R}^+,\quad i=\overline{1,m}.$$

Како је $\left(x_i^{n_i}+\dfrac{b_i}{2a_i}\right)^2\geqslant 0$ за све $x_i\in\mathbf{R}$ и $a_i\in\mathbf{R}^+$, то је

$$(*)\qquad a_ix_i^{2n_i}+b_ix_i^{n_i}+c_i\geqslant\frac{4a_ic_i-b_i^2}{4a_i}$$

при чему једнакост у $(*)$ важи ако и само ако је $x_i^{n_i}=-\dfrac{b_i}{2a_i}$ и за ту вриједност трином $a_ix_i^{2n_i}+b_ix_i^{n_i}+c_i$ поприма најмању вриједност $\dfrac{4a_ic_i-b_i^2}{4a_i}$. Уколико је реални број d (за кога је најављено да зависи од бројева a_i, b_i, c_i) мањи од призвода $\prod\limits_{i=1}^{m}\dfrac{4a_ic_i-b_i^2}{4a_i}$, тада дата једначина нема реалних рјешења. Занимаће нас случај када је број d баш једнак овом производу, тј.

$$(**)\qquad \prod_{i=1}^{m}(a_ix_i^{2n_i}+b_ix_i^{n_i}+c_i)\geqslant\prod_{i=1}^{m}\frac{4a_ic_i-b_i^2}{4a_i}=d,$$

односно када је „d погођено да буде $\prod\limits_{i=1}^{m}\dfrac{4a_ic_i-b_i^2}{4a_i}$“. Једнакост у неједнакости $(*)$ важи ако и само ако је $x_i^{n_i}=-\dfrac{b_i}{2a_i}$, $i=\overline{1,m}$, одакле се добијају рјешења полазне једначине. Ово илуструјемо следећим примјером.

Примјер. Наћи сва реална рјешења једначине

$$16x^{16}y^4-80x^8y^4+160y^4-48x^{16}y^2+240x^8y^2-480y^2+48x^{16}-240x^8+435=0.$$

Рјешење. Елементарним трансформацијама дату једначину сводимо на:

$$16x^{16}(y^4-3y^2+3)-80x^8(y^4-3y^2+3)+160(y^4-3y^2+3)=45,$$
$$16(x^{16}-5x^8+10)(y^4-3y^2+3)=45.$$

Можемо примјетити да важи следеће:

$$x^{16}-5x^8+10=\left(x^8-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\geqslant\frac{15}{4},$$
$$y^4-3y^2+3=\left(y^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Зато је $16(x^{16}-5x^8+10)(y^4-3y^2+3)\geqslant 16\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{3}{4}=45$, при чему једнакост важи ако и само ако је $x^{16}-5x^8+10=\frac{15}{4}$ и $y^4-3y^2+3=\frac{3}{4}$, односно ако и само ако је $x^8=\frac{5}{2}$ и $y^2=\frac{3}{2}$. Дакле, сва реална рјешења дате једначине дата су скупом

$$SR=\left\{\left(\sqrt[8]{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\left(-\sqrt[8]{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\left(\sqrt[8]{\frac{5}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\left(-\sqrt[8]{\frac{5}{2}},-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\}.$$

Примјер. Одредити сва реална рјешења једначине

$$(a^4-4a^2+7)(5b^{10}-5b^5+2)(2c^{12}-4c^6+7)=11{,}25.$$

Рјешење. Аналогно претходном задатку добија се да су сва рјешења дате једначине дата скупом

$$SR=\{(\sqrt{2},\sqrt[5]{0{,}5},1),(-\sqrt{2},\sqrt[5]{0{,}5},1),(\sqrt{2},\sqrt[5]{0{,}5},-1),(-\sqrt{2},\sqrt[5]{0{,}5},-1)\}.$$

3. Следећа једначина коју ћемо посматрати је једначина облика

$$x^{y^{2m}+z^{2n}}+(x+t)^{y^{2m}+z^{2n}}-(x+s)^{y^{2m}+z^{2n}}=0$$

и која се ријешава у скупу природних бројева. Наиме, овдје су x, y, z, t, s, m и n природни бројеви (m и n су дати а остали непознати). Ако је $t\geqslant s$, онда ова једначина нема рјешења у скупу $\mathbf{N}$. Према томе, ријешаваћемо ову једначину у случају када је $t<s$, а до рјешења ћемо долазити уз помоћ „Велике Фермаове[1] теореме" понекад зване и „последњом", која гласи: „Ако је n било који природан број већи од 2, тада једначину

$$(*)\qquad x^n+y^n=z^n$$

не могу задовољити никоја три природна броја x, y и z". Другачије речено, Диофантова једначина $(*)$ за $n\geqslant 3$ нема рјешења у скупу природних бројева.

[1] Pierre de Fermat, 1601–1665

Напишимо дату једначину у следећем облику

$$x^{y^{2m}+z^{2n}} + (x+t)^{y^{2m}+z^{2n}} = (x+s)^{y^{2m}+z^{2n}}.$$

Према наведеној теореми, дата једначина нема рјешења уколико је $y^{2m}+z^{2n} > 2$. Одатле се лако закључује да мора бити $y^{2m}+z^{2n} = 2$, а то је (за природне y и z) једино могуће ако је $y = z = 1$. Имајући у виду добијени резултат полазна једначина постаје квадратна једначина са три непознате x, t и s. Илуструјмо ово следећим примјером.

Примјер. Одредити све природне бројеве (x, y, z, t) за које важи једнакост

$$x^{y^8+z^6} + (x+t)^{y^8+z^6} = (x+4)^{y^8+z^6}.$$

Рјешење. На основу Велике Фермаове теореме лако закључујемо да је $y^8 + z^6 = 2$ (јер једнакост $y^8+z^6 = 1$ није могућа за природне бројеве y и z). Одатле следи да је $y = z = 1$, а дата једначина се своди на

$$x^2 + (x+t)^2 = (x+4)^2.$$

Сређивањем добијамо $x^2 + 2(t-4)x + t^2 - 16 = 0$, а рјешавањем по x,

$$x_{1,2} = 4 - t \pm \sqrt{32-8t},$$

при чему једначина има реална рјешења ако и само ако је $32 - 8t \geqslant 0$, тј. $t \leqslant 4$. Како је t природан број, имамо да је $t \in \{1, 2, 3, 4\}$, па једниоставном провјером долазимо до закључка да једино за $t = 2$ ова једначина даје природно $x = 6$. Рјешење дате једначине је уређена четворка $(x, y, z, t) = (6, 1, 1, 2)$.

Примјер. Наћи све парове цијелих бројева за које је

$$18m + 90n = 20m^2 + 2mn + n^2.$$

Рјешење. Дату једначину можемо написати у облику

$$5n^2 + 2(m-45)n + 20m^2 - 18m = 0.$$

Рјешавањем ове квадратне једначине по n добија се

$$(*) \qquad n_{1,2} = \frac{45 - m \pm \sqrt{2025 - 99m}}{5}.$$

Стога, једначина има реална рјешења ако и само ако је $2025 - 99m^2 \geqslant 0$, тј. $m^2 \leqslant 225/11$. Како је m цио број, то може бити једино $m^2 \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$, одакле следи $m \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Да би n био цио број неопходно је да дискриминанта буде потпун квадрат. Замијеном вриједности за m из скупа $\{-4, 0, 4\}$ у $(*)$ добијају се сва рјешења дате једначине; то су парови $(0, 0)$, $(0, 18)$, $(4, 4)$ и $(-4, 14)$.

Примјер. Одредити сва реална рјешења једначине

$$x^4y^6 - 14x^2y^4 + 9x^2 + 74y^2 = 30xy.$$

Рјешење. Дату једначину трансформишемо на следећи начин:

$$x^4y^6 - 14x^2y^4 + 49y^2 + 9x^2 - 30xy + 25y^2 = 0,$$
$$(x^2y^3 - 7y)^2 + (3x - 5y)^2 = 0.$$

Одавде је

$$(1)\quad x^2y^3 - 7y = 0 \qquad \text{и} \qquad (2)\quad 3x - 5y = 0.$$

Из (2) добијамо $x = \frac{5}{3}y$, па уврштавањем у (1) следи $y(x^2y^2-7) = y\left(\frac{25}{9}y^4 - 7\right)$ $= 0$, односно $y = 0$ или $y = \pm\sqrt[4]{\frac{63}{25}}$. Одговарајуће вриједности за x добијамо из $x = \frac{5}{3}y$. Према томе, сва рјешења дате једначине дата су скупом

$$SR = \left\{ (0,0), \left(\frac{5}{3}\sqrt[4]{\frac{63}{25}}, \sqrt[4]{\frac{63}{25}}\right), \left(-\frac{5}{3}\sqrt[4]{\frac{63}{25}}, -\sqrt[4]{\frac{63}{25}}\right) \right\}.$$

Примјер. Наћи све парове природних бројева a, b који задовољавају једнакост

$$\sqrt[3]{54a^b}\,\sqrt[3]{(b+2659)^2} = 2a^b + 2b + 5318.$$

Рјешење. Познато је да важи следећа неједнакост: ако је $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, гдје је $p > 1$, тада је $x^{1/p}y^{1/q} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$, са једнакошћу ако и само ако је $x = y$. Напишимо нашу једначину у следећем облику:

$$3\sqrt[3]{2a^b}\,\sqrt[3]{(b+2659)^2} = 2a^b + 2(b+2659),$$
$$(*)\qquad (2a^b)^{\frac{1}{3}}(b+2659)^{\frac{2}{3}} = \frac{2a^b}{3} + \frac{b+2659}{\frac{3}{2}}.$$

У овом случају ($x = 2a^b$, a $y = b + 2659$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$) једнакост $(*)$ важи ако и само ако је $2a^b = b + 2659$, тј. $2a^b - b = 2659$. Рјешимо ову последњу једначину у скупу $\mathbf{N}$. Ако је $a = 1$, b је негативан број, што се лако провјерава. Зато је $a \geqslant 2$. Ако је $b \geqslant 11$, имамо

$$2a^b - b \geqslant 2\cdot 2^b - b \geqslant 2\cdot 2^{11} - 11 = 2^{12} - 11 = 4085 > 2659.$$

Дакле, $b \leqslant 10$. По услову задатка је b непаран број (видјети $2a^b - b = 2659$), па то може бити само неки од бројева 1, 3, 5, 7, 9. Директном провиjером налазимо да је $b = 1$ (таад је $a = 1330$) или $b = 3$ (тада је $a = 11$). Дакле, рјешења су уређене двојке $(1330, 1)$ и $(11, 3)$.