Др Радослав Димитријевић

ОСНОВНИ ПЕРИОД ФУНКЦИЈЕ

Са појмом основног периода функције ученици се први пут сусрећу у средњој школи при изучавању тригонометријских функција. При томе се сматра да основни период тригонометријских функција постоји. Међутим, доказ егзистенције основног периода функције није баш тривијалан и захтева одређена знања из математичке анализе. Доказ ове теореме тешко је наћи у уџбеницима анализе из једноставног разлога што се у првом курсу анализе изучава непрекидност, диференцијабилност и друга својства тригонометријских функција за која периодичност није од особите важности. У другом курсу анализе у коме се изучавају Фуријеови редови ова теорема се не доказује највероватније што се сматра да је ово предмет изучавања првог курса анализе. И тако се ова доста битна теорема једноставно тешко може наћи у стандардним уџбеницима математичке анализе. Основни мотив овог рада је доказ теореме о егзистенцији основног периода функције код једне веома широке класе периодичних функција.

Многи процеси у природи су периодичног карактера. Они се у правилним временским размацима понављају, а описују се периодичним функцијама.

Дефиниција 1. Реална функција $f\colon X \to \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}$, је *периодична* ако постоји реалан број $T \neq 0$ такав да је за свако $x \in X$, испуњено $x + T \in X$, $x - T \in X$ и $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$. Број T назива се *периодом функције*.

Ако је T период функције f, тада је nT, $n \in \mathbf{Z}$, такође период те функције. Заиста, замењујући x са $x + T$ (одн. $x - T$), лако се доказује да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи једнакост $f(x) = f(x + nT)$ (одн. $f(x) = f(x - nT)$). Осим тога, ако су T_1 и T_2 два периода функције f, тада је и $T_1 \pm T_2$ период функције f. Према томе, свака периодична функција има бесконачно много периода.

Дефиниција 2. Нека је f периодична функција. Ако постоји најмањи позитиван период T функције f, онда је T *основни период* функције f.

Природно се поставља следеће питање: да ли свака периодична функција има најмањи позитиван период? Одговор је негативан, што показује следећи

Пример 1. За Дирихлеову функцију

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

сваки рационалан број $r \in \mathbf{Q}$ је период, па не постоји најмањи период.

Приметимо да је Дирихлеова функција прекидна у свакој тачки $x \in \mathbf{R}$. Међутим, функција $f(x) = c$, $x \in \mathbf{R}$, непрекидна је на $\mathbf{R}$, сваки реалан број је период те функције, па не постоји најмањи позитиван период те функције.

У даљем излагању биће коришћена Канторова теорема коју наводимо без доказа. За њен доказ читаоца упућујемо на ма који стандардни уџбеник анализе.

Теорема 1. *Ако је нека функција непрекидна на затвореном интервалу, онда је она равномерно непрекидна на њему.*

Да бисмо одговорили на питање о егзистенцији најмањег позитивног периода, докажимо најпре следећу теорему.

Теорема 2. *Свака непрекидна периодична функција* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *је равномерно непрекидна на* $\mathbf{R}$.

Доказ. Нека је T период функције f. Како је функција f непрекидна на $\mathbf{R}$, она је према Канторовој теореми равномерно непрекидна на сегменту $[-T, 2T]$. Стога за свако $\varepsilon > 0$ постоји δ, $T > \delta > 0$, тако да за свако $x_1, x_2 \in [-T, 2T]$ из $|x_1 - x_2| < \delta$ следи неједнакост $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Нека су y_1 и y_2 реални бројеви који задовољавају услов $|y_1 - y_2| < \delta$ и нека је $k = [y_1/T]$. Тада $t_1 = y_1 - kT$, $t_2 = y_2 - kT \in [-T, 2T]$, $|t_1 - t_2| = |y_1 - y_2| < \delta$, па је

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(t_1 + kT) - f(t_2 + kT)| = |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon,$$

чиме је доказана равномерна непрекидност функције f на $\mathbf{R}$. ∎

Напоменимо да доказана теорема не важи у случају непрекидне периодичне функције чији је домен $X \neq \mathbf{R}$. Функције $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ су периодичне и непрекидне у области дефинисаности, али нису равномерно непрекидне.

Теорема 3. *Ако је непрекидна периодична функција* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *различита од константне функције, тада она има најмањи позитиван период.*

Доказ. Како је непрекидна, периодична функција f различита од константне функције, постоје реални бројеви x_1 и x_2 за које је $f(x_1) \neq f(x_2)$. Нека је $|f(x_1) - f(x_2)| = d$. Функција f је према теореми 2 равномерно непрекидна, па стога за свако $\varepsilon > 0$, дакле и за $\varepsilon < d$, постоји $\delta > 0$ тако да за сваки пар реалних бројева y_1 и y_2 који задовољавају услов $|y_1 - y_2| < \delta$ важи неједнакост $|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon$. Ако функција не би имала најмањи позитиван период, постојао би период T_δ функције f који задовољава услов $T_\delta < \delta$. Означимо $k = [(x_2 - x_1)/T_\delta]$. Тада је

$$\frac{x_2 - x_1}{T_\delta} = k + \frac{h}{T_\delta},$$

где је $0 < h < T_\delta < \delta$. Стога је

$$d = |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(x_1 + h + kT_\delta)| = |f(x_1) - f(x_1 + h)| < \varepsilon,$$

што је супротно начину избора броја ε. Добијена контрадикција доказује да функција f има основни период. ∎

На основу доказане теореме непосредно следи да тригонометријске функције $\sin x$ и $\cos x$ имају основни период. Доказ да је основни период ових функција 2π читалац може видети у књизи [2].

Наведимо сада још једну наизглед очигледну чињеницу која важи за периодичне функције.

Теорема 4. *Нека је функција $f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ периодична са основним периодом T. Ако је функција f интеграбилна у својственом или несвојственом смислу на сегменту $[0,T]$, тада је она интеграбилна на сваком коначном сегменту реалне праве. При томе за свако $a\in\mathbf{R}$ важи*

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx. \tag{1}$$

Доказ. Нека је $[a,b]\subset\mathbf{R}$ произвољан сегмент. Тада постоје цели бројеви m и n тако да је $mT\leqslant a<b\leqslant nT$. Како је

$$\int_0^T f(x)\,dx=\int_{kT}^{(k+1)T} f(t-kT)\,dt=\int_{kT}^{(k+1)T} f(t)\,dt,$$

функција f је интеграбилна на $[kT,(k+1)T]$. Сада на основу адитивности интеграла следи интеграбилност функције f на сваком сегменту $[mT,nT]$, па дакле и на сегменту $[a,b]$. Тиме смо доказали да интеграл на левој страни једнакости (1) постоји. Да докажемо ову једнакост, приметимо да је

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\int_a^T f(x)\,dx+\int_T^{a+T} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Увођењем смене $x=y+T$ у последњем интегралу ове једнакости добијамо следећу једнакост

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx=\int_0^a f(y)\,dy. \tag{3}$$

сада из (2) и (3) следи (1). ■

Из једнакости (1) непосредно добијамо следећу једнакост

$$\int_0^T f(x-t)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx,\quad t\in\mathbf{R}.$$

Заиста, увођењем смене $x-t=z$ имамо

$$\int_0^T f(x-t)\,dx=\int_{-t}^{T-t} f(z)\,dz=\int_0^T f(x)\,dx.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић, Л. Милин, *Тригонометрија*, „Круг“, Београд, 1999.

[2] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 3*, „Круг“, Београд, 1998.

[3] Р. Димитријевић, *Анализа реалних функција више променљивих*, „Сириус“, Ниш, 1999.