др Јудита Цофман

КАКО МОТИВИСАТИ 10–18-ГОДИШЊЕ УЧЕНИКЕ ДА У ТОКУ НАСТАВЕ САМОСТАЛНО РЕШАВАЈУ РАЗНЕ МАТЕМАТИЧКЕ ЗАДАТКЕ

Увод

Следећи задатак је укључен у књигу [1]:

> Два човека, A и B, сретну се на улици и разговарају. A каже: „Имам три сина. Сви они имају данас свој рођендан.“ B пита: „Колико година имају твоји синови?“ A одговара: „Производ бројева њихових година је 36.“ B: „Дај ми још коју информацију.“ A, показујући на кућу испред њих: „Збир бројева њихових година је једнак броју прозора на овој кући.“ B после извесног размишљања: „Треба ми још неки податак.“ A: „Мој најстарији син има плаве очи.“ „То је довољно“, каже B и даје тачан одговор.

Решење. Нека су синови стари x, y и z година. Пошто се зна да је $xyz = 36$, посматрају се сва разлагања броја 36 у производе од по три фактора; како је $x+y+z$ једнако броју прозора на кући, за свако разлагање броја 36 на факторе израчунава се збир тих фактора. Има осам могућности разлагања: 36,1,1; 18,2,1; 12,3,1; 9,4,1; 9,2,2; 6,6,1; 6,3,2 и 4,3,3, а одговарајући збирови фактора су, редом, 38, 21, 16, 14, 13, 13, 11 и 10. Ако би број прозора на кући био различит од 13, B би одмах знао одговор. Пошто B још не зна одговор, збир мора да буде 13, а године синова 6,6,1 или 9,2,2. У првом случају A не би имао „најстаријег“ сина. Дакле, правилно решење је $x = y = 2$ и $z = 9$.

Од чувеног кинеског филозофа Конфучија, који је живео од 551. до 479. године п.н.е, потиче следећа изрека: „Испричај ми, па ћу то заборавити. Покажи ми, те ћу се тога сећати. Допусти да се сам прихватим дотичног посла и тада ћу га схватити.“ Ова древна мудрост важи у различитим пољима људске делатности, између осталог и у настави математике. Ученике треба систематски навикавати на самостални рад при решавању математичких проблема. То захтева, поред стручне спремности, спретност и велики ангажман наставног особља. Важно је наћи погодан избор задатака, који ће омогућити сваком ученику у разреду да понешто сам открије и да сам нађе одговоре на бар нека од питања у вези са

Пленарно предавање на 10. конгресу математичара Југославије, Београд, 21–24. 01. 2001. године.

постављеним задатком. У овом предавању изложићу примере оваквих задатака и говорићу о свом искуству при њиховој обради на часовима математике. При томе ћу се осврнути на предности, а исто тако и на тешкоће за време рада.

Предавање се састоји из три дела.

У првом делу анализираћу обраду задатака за ученике, старе 14–15 година, у вези са целобројним решењима једначине $ax+by=n$, где су a, b и n природни бројеви.

Други део предавања се односи на решавање проблема о низовима и из комбинаторике за ученике у вишим разредима гимназије.

У трећем делу предавања бих желела да подвучем значај развијања самосталних радних навика од ране младости. То ћу илустровати задацима намењеним ученицима од 10 до 13 година.

Први део

За развијање самосталних радних навика нарочито су погодни задаци за истраживање. Следећа група оваквих задатака постављена је 14–15-годишњим ученицима у Енглеској од стране једног од испитних центара који организују завршне испите после обавезног школовања. Требало је да ученици у року од седам дана, на часовима математике и у оквиру домаћих задатака, одговоре на што више постављених питања и да напишу реферат о својим запажањима. Консултације са друговима у разреду су биле допуштене. Наставник је могао, по потреби, давати примедбе и општа упутства за прилаз проблемима. Задаци су се ређали од једноставних до сложених. На тај начин и најслабији ученици су могли да реше бар неке од њих и да сакупе бодове потребне за прелазну оцену; најсложенији проблеми, са краја списка, били су намењени одликашима. Задаци су били следећи:

Задатак 1. Наћи највећи природни број који се *не може* написати као збир са сабирцима из скупа $S=\{3,5\}$.

Задатак 2. Како гласе одговори на питање постављено у задатку 1 ако је: а) $S=\{2,7\}$; б) $S=\{6,5\}$; в) $S=\{15,14\}$.

Задатак 3. Наћи одговор на питање из задатка 1 ако је: а) $S=\{1,9\}$; б) $S=\{4,20\}$.

Задатак 4. Опиши своја запажања при раду, упоређујући своје одговоре на задатке 1–3.

Задатак 5. Како треба изабрати природне бројеве p и q да би важило следеће тврђење: не постоји највећи природни број који се *не може* написати као збир са сабирцима из скупа $\{p,q\}$? Образложи свој одговор.

Задатак 6. Нека су p и q узајамно прости природни бројеви, већи од 1. Наћи формулу за највећи природни број који се *не може* представити као збир са сабирцима из скупа $\{p,q\}$.

Горе наведене задатке сам обрађивала са разним групама ученика. Првом приликом сам то чинила у разреду састављеном од ученика слабих у математици, али вредних и мотивисаних да положе завршни испит. Са овом групом сам имала следећа искуства:

(i) На задатак 1 и на делове а) и б) задатка 2 пробањем су добијени правилни одговори (7, односно 5 и 19). Део в) задатка 2 представљао је тешкоћу, јер су сабирци били велики бројеви, што је отежало пробање (одговор је 181).

(ii) Задатак 3 је већина ученика решила. Одоговор на део а) гласи: пошто се сваки природни број може написати као збир јединица, не постоји ниједан природни број који се не може приказати као збир са сабирцима из скупа $\{1,9\}$. Одговор на део б) је следио из запажања да је број 4 чинилац броја 20. То значи да су сви збирови са сабирцима из скупа $\{4,20\}$ дељиви бројем 4. Ван скупа $\{4,8,12,16,\ldots,4k,\ldots\}$ постоји бесконачно много природних бројева (то се лепо може приказати на бројној линији). Међу њима *нема* највећег природног броја n облика $n \neq a\cdot 4 + b\cdot 20$ са $a,b \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, $(a,b)\neq(0,0)$.

(iii) На задатке 4 и 5 одговори су били само делимични. Утврђено је да не постоји највећи природни број $n \neq ap+bq$ са $a,b\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $(a,b)\neq(0,0)$ ако је бар један од бројева p и q једнак 1, или ако је један од бројева p и q дељив другим.

Само су две ученице у разреду схватиле да не постоји највећи природни број $n \neq ap+bq$ са $a,b\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $(a,b)\neq(0,0)$ кадгод је највећи заједнички делилац d бројева p и q већи од 1. Наиме, тада је $ap+bq$ дељив са d и ван скупа $\{\, ap+bq\ ;\ a,b\in\mathbf{N}\cup\{0\},(a,b)\neq(0,0)\,\}$ нема највећег природног броја.

(iv) Задатк 6 је превазишао способности ученика у овом разреду Самосталним радом не би били у стању да наслуте одговор на ово питање.

У овој фази рада сматрала сам да је педагошки оправдано да се укључим у дискусију. Решила сам да на примеру задатака 1–6 упознам ученике са предностима *систематског* испитивања при раду.

Враћајући се на задатак 1, предложила сам да се уместо природних бројева $n\neq a\cdot 3+b\cdot 5$ са $a,b\in\mathbf{N}\cup\{0\}$, $(a,b)\neq(0,0)$ пре свега наведу они природни бројеви n за које важи једнакост $n=a\cdot 3+b\cdot 5$ за све могуће изборе $a,b\in\mathbf{N}\cup\{0\}$. Указала сам на то да се то може систематски учинити помоћу табеле 1.

	3	6	9	12	15	…
5	8	11	14	17	20	…
10	13	16	19	22	25	…
15	18	21	24	27	30	…
20	23	26	29	32	35	…
…	…	…	…	…	…	…

Табела 1

Табела 1 је конструисана тако да се горњи ред састоји од природних бројева $a\cdot 3+0\cdot 5$ (са $a\in\mathbf{N}$). У реду испод тога су бројеви $a\cdot 3+1\cdot 5$, затим следе редови са бројевима $a\cdot 3+2\cdot 5$, $a\cdot 3+3\cdot 5$, $a\cdot 3+4\cdot 5$, … , при чему $a\in\mathbf{N}\cup\{0\}$.

Табелом 1 је постигнут жељени ефекат: ученици су поново били стимулисани да раде самостално, испитујући особине приказаних бројева. Утврђено је (са образложењима) следеће: 1) Сви бројеви у прва три реда су међусобно различити. 2) Бројеви у 4, 7, 10, ... реду су садржани у првом реду, бројеви у 5, 8, 11, ... реду су садржани у другом реду, а бројеви у 6, 9, 12, ... реду су садржани у трећем реду. Према томе, при изучавању особина табеле 1 довољно је ограничити се на прва три реда. 3) Табела 1 садржи све природне бројеве $n \geqslant 8$; чланови низа 8, 9, 10, ... се ређају на дужима, паралелним дужи повученој кроз бројеве 10, 11 и 12 (видети табелу 2). 4) Неки ученици су допунили прва три реда табеле 1: први ред бројевима $a \cdot 3$ са $a = 0, -1, -2, \dots$, други и трећи ред бројевима $a \cdot 3 + 1 \cdot 5$, односно $a \cdot 3 + 2 \cdot 5$ са $a = -1, -2, -3, \dots$. Тако је настала табела 2 са три реда, представљајући скуп $\mathbf{Z}$ целих бројева:

...	−12	−9	−6	−3	0	3	6	9	12	15	18	...
...	−7	−4	−1	2	5	8	11	14	17	20	23	...
...	−2	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	...

Табела 2

Из табеле 2 се јасно види да се највећи природни број (7) који се не може приказати као збир са сабирцима из скупа $\{3, 5\}$ налази испред првог члана трећег реда табеле 1. На моје питање: „Коју заједничку особину поседују сви бројеви у појединим редовима табеле 2?“, након мало размишљања следио је правилан одговор: сви бројеви у појединачним редовима тебеле 2 поседују исти остатак при деоби са 3; ти су остаци 0, 2 и 1 за бројеве у првом, односно другом и трећем реду.

Табеле аналогне табели 2 су конструисане и за бројеве облика $a \cdot 2 + b \cdot 7$, $a \cdot 6 + b \cdot 5$ и $a \cdot 5 + b \cdot 14$ у задацима 2а), б) и в). То је доводило до једноставног решења дотичних задатака. Неки од ученика су након тога наслућивали правилни одговор за задатак 6:

> Формула за највећи природни број n који се не може приказати у облику $ap + bq$ са $a, b \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, при чему су p и q узајамно прости природни бројеви, гласи: $n = q(p-1) - p$, тј.
>
> $$n = pq - p - q.$$

Тиме је рад на задацима 1–6 са овим разредом завршен.

Након извесног времена имала сам прилику да исту групу задатака као вежбу (а не као саставни део испита) обрадим са разредом са добрим ученицима. Тада смо решили задатак 6 помоћу табеле 3:

...	$-p$	0	p	$2p$	...
...	$q-p$	q	$q+p$	$q+2p$	...
...	$2q-p$	$2q$	$2q+p$	$2q+2p$	...
...	$3q-p$	$3q$	$3q+p$	$3q+2p$	...
...	...	...	...	...	...
...	$(p-1)q-p$	$(p-1)q$	$(p-1)q+p$	$(p-1)q+2p$	...

Табела 3

Хоризонталне редове табеле 3 смо нумерисали са i за $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, а вертикалне ступце са j за $j = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Заједничким напорима смо доказали следеће особине табеле 3 (доказе остављамо за вежбу):

(1) У сваком од редова бројеви монотоно расту идући с лева надесно.

(2) У сваком ступцу бројеви монотоно расту идући одозго надоле.

(3) Нека је r_i остатак броја iq при дељењу са p. Тада важи:

  (i) сви бројеви у i-том реду имају остатак r_i при дељењу са p;

  (ii) сви цели бројеви са остатком r_i при дељењу са p су садржани у i-том реду.

(4) За било која два природна броја i_1, i_2 са $0 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant p-1$, остаци r_{i_1} и r_{i_2} бројева $i_1 q$, односно $i_2 q$ при дељењу са p су различити. Према томе $\{r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}\} = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$.

Из (4) следи да табела 3 представља скуп $\mathbf{Z}$ целих бројева. Највећи природни број који се не може приказати као збир $ap+bq$ за $a, b \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $(a, b) \neq (0, 0)$ је најнижи број ступца са елементима $-p$, $q-p$, $2q-p$, $\ldots$; значи, то је број $(p-1)q-p$, тј. $pq-p-q$.

Примедба. Задатак 6 је специјалан случај проблема који је поставио немачки математичар Фробениус (Frobenius, 1849–1917): одредити највећи природни број n за који једначина $n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$, где су a_i узајамно прости природни бројеви, нема решења у ненегативним целим бројевима. Решење Фробениусовог проблема за $k = 2$ је било познато енглеском математичару Силвестеру (Sylvester, 1814–1897). Он је доказао да укупно има $(a_1-1)(a_2-1)/2$ природних бројева који се не могу представити у облику збира $\sum_{i=1}^{2} a_i x_i$ са $a_1, a_2 \in \mathbf{N}$, при чему су a_1 и a_2 узајамно прости бројеви. Решење проблема за $k = 3$ потиче тек из 1978. године; за $k \geqslant 4$ до сада није пронађено решење.

Други део

Из табеле 1 се види да се неки од природних бројева могу на више начина приказати као збирови са сабирцима из скупа $\{3, 5\}$. На пример, $23 = 6 \cdot 3 + 1 \cdot 5$, а са друге стране $23 = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 5$. Ово запажање је сугерисало задатак 7 за ученике у вишим разредима гимназије.

Задатак 7. Утврдити број представљања произвољног природног броја n у облику збира са сабирцима из скупа $\{1, 2\}$.

Обележимо тражени број са a_n. Матуранти у једној гимназији, где сам обрађивала горњи проблем, предложили су два различита прилаза решењу:

а) Неки од ученика су кренули да систематски утврде a_n за мале вредности броја n и том приликом саставили табелу 4. Из те табеле се види: за свако $n \geqslant 3$ постоје два скупа представљања броја n у облику збира са сабирцима из скупа $\{1, 2\}$. У првом скупу су збирови са последњим сабирком 1; у другом скупу су збирови са последњим сабирком 2. Број збирова у првом скупу је a_{n-1}, док је број збирова у другом скупу a_{n-2}. Према томе:

$$
\begin{aligned}
a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{за} \quad n \geqslant 3,\\
a_1 = 1, \quad a_2 = 2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Рекурзивни образац (1) са почетним условима за a_1 и a_2 карактерише чувене Фибоначијеве бројеве f_n за $n \geqslant 1$ (Fibonacci, 1170–1240). Ови бројеви чине Фибоначијев низ $f_0, f_1, f_2, \dots$, при чему је $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ и $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ за $n \geqslant 2$.

број n	начини представљања n као збира	a_n
1	$1 = 1$	1
2	$2 = 1 + 1$ $2 = 2$	2
3	$3 = 1 + 1 + 1$ $3 = 2 + 1$ $3 = 1 + 2$	3
4	$4 = 1 + 1 + 1 + 1$ $4 = 2 + 1 + 1$ $4 = 1 + 2 + 1$ $4 = 1 + 1 + 2$ $4 = 2 + 2$	5
...	...	...

Табела 4

Дакле, ученици су дошли до закључка да је

$$
a_n = f_n \quad \text{за свако } n \in \mathbf{N}. \tag{2}
$$

б) Било је и таквих ученика у разреду који су збирове за n класификовали према броју сабирака једнаких 2 у збиру. Они су утврдили следеће:

збирова без сабирка 2 има укупно $\binom{n}{0}$;

збирова са једним сабирком 2 има укупно $\binom{n-1}{1}$;

збирова са два сабирка 2 има укупно $\binom{n-2}{2}$;

збирова са три сабирка 2 има укупно $\binom{n-3}{3}$

и тако редом. Значи,

$$
a_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n-[n/2]}{[n/2]}, \tag{3}
$$

где је $[n/2]$ највећи природни број који не превазилази $n/2$.

Приступи а) и б) решавању задатка 7 довели су до прекрасног закључка: комбинацијом резултата (2) и (3) се долази до познате формуле француског математичара Лика (Lucas, XIX век) за Фибоначијеве бројеве:

$$f_n = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n-i}{i}. \tag{4}$$

На тај начин је група матураната поново открила формулу (4).

Ученицима је било и то познато да су биномни коефицијенти $\binom{n}{k}$ за $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $k = 0, 1, \ldots, n$ елементи тзв. Паскаловог троугла. (Француски филозоф и математичар Pascal (1623–1662) је утврдио разне особине овог бројчаног троугла, који због тога носи његово име. У ствари, Паскалов троугао је био познат и пре њега – на пример, у Кини.) У Паскаловом троуглу биномни коефицијенти који чине збирове (4) се налазе на правим l_n паралелним правој кроз $\binom{2}{0}$ и $\binom{1}{1}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

Паскалов троугао

Горња илустрација формуле (4) довела је до предлога за уопштење Ликаовог резултата:

Задатак 8. Конструисати праве q_i кроз биномне коефицијенте $\binom{1}{1}$ и $\binom{i}{0}$ Паскаловог троугла, а затим покрити све елементе Паскаловог троугла правим паралелним правој q_i. Збирови биномних коефицијената на овим правим образују низ S_i природних бројева. Испитати особине S_i за различите вредности i.

Неки од ученика су предложили и следећу генерализацију задатка 7.

Задатак 9. Утврдити број представљања природног броја n у облику збира са сабирцима из скупа $\{1, 2, 3\}$.

Лако је утврдити помоћу табеле, аналогне табели 4, да је број b_n представљања броја n једнак елементу t_n низа

$$1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 13,\ \ldots$$

за који важи рекурзивни образац

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3} \quad \text{за} \quad n \geqslant 3$$

при чему је

$$t_0 = t_1 = 1, \quad t_2 = 2.$$

Са друге стране, t_n се може изразити као збир триномних коефицијената (тј. бројева облика $\dfrac{p!}{q!\,r!\,s!}$ са $q + r + s = p$).

Решење задатка 9 није уследило у разреду, него је остављено као вежба за одликаше.

Трећи део

Уклапање самосталног рада ученика у наставу математике не представља нарочиту тешкоћу ако се ученици од раних дана навикавају на систематска испитивања и на анализу постигнутих резултата. Овакав приступ раду олакшава чињеница да деца поседују здраву интуицију и не устручавају се да износе своја мишљења и поседују живу машту, која често доводи до интересантних предлога за уопштења, или варијације појединих проблема. Овде ћу се укратко осврнути на две теме са којима сам доживела охрабрујућа запажања при раду са ученицима старим 10–13 година.

а) Конструкција модела за полиедре

Задатак 10. (за 10-годишње ученике) Исеци од картона велики број једнакостраничних троуглова са ивицама дужине 10 cm. Користи ове троуглове да од њих – лепљењем ивица – направиш што више различитих тела.

При решавању задатка 10 ученици су радили самостално или – по жељи – у мањим групама. Конструисани су најразличитији типови полиедара: конвексни, конкавни, па и звездасти полиедри. Након тога сам ученике замолила да запишу запажања о моделима добијених тела. Једна од важних последица нашег подухвата је била констатација: ученицима је била пружена могућност да се суоче са примерцима платонских тела (међу моделима поред тетраедра и октаедра нашао се чак и икосаедар) и да само открију неке од особина ових тела, које их чине истакнутим у скупу свих могућих полиедара. Ту ми се указала прилика да ученике упознам и са два остала платонска тела: са коцком (са којом су наравно сви били фамилијарни) и са додекаедром, а поред тога да им испричам понешто о грчком филозофу Платону (427–348 п.н.е).

Интереснатна је била примедба понеких ученика: сви конструисани модели имају парни број страна. Узраст ученика није дозволио да се доказом увере у то да не постоје полиедри са непарним бројем страна, ако су све стране полиедра троуглови. (Доказ се може извести у вишим разредима гимназије на следећи начин: Избројимо такозване *инцидентне* парове ивица и страна полиедра P, чије су све стране троуглови. Пар који се састоји од неке ивице и неке стране се назива инцидентним ако ивица припада тој страни. Нека је број страна полиедра P једнак s. Пошто свака страна има 3 ивице, то је број инцидентних парова ивица и страна $s \cdot 3$. С друге стране, нека је број ивица полиедра P једнак i. Свака ивица – барем на нашим моделима – инцидентна је са две стране; према томе број инцидентних парова ивица и страна може се изразити и помоћу производа $i \cdot 2$. Из једнакости $3s = 2i$ следи да број s мора бити дељив са 2.)

Задатак 11. (намењен 11–12-годишњим ученицима који су упознати са појмом и примерима мреже коцке) *Хексамино* је геометријска фигура у равни, састављена од шест квадрата једнаких величина таквих да: 1) сваки од квадрата има бар једну ивицу заједничку са неким од осталих квадрата и 2) два разна квадрата могу имати или једно теме заједничко, или једну ивицу заједничку; у противном немају заједничких тачака.

(i) Нацртај на картону што више различитих хексамина и обележи знаком $\surd$ она хексамина на твом цртежу за која мислиш да могу послужити као мреже за коцку.

(ii) Након тога исеци хексамина и покушај да од њих направиш коцке. На тај начин утврди да ли си део (i) задатка решио правилно.

Задатак 11 се показао веома корисним за развијање представа о простору, и у исто време је представљао добру вежбу из комбинаторике.

б) Примена фигуративних бројева у аритметици и алгебри

У древној Грчкој разни типови бројева представљани су бројем тачака поређаних тако да чине познате георметријске фигуре. На пример, бројеви једнаки производима $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $4 \cdot 4$, ... , представљани су тачкама поређаним у облику квадрата:

Сл. 1

Горња геометријска интерпретација оправдава назив „*квадратни број*“ за n^2, где $n \in \mathbf{N}$.

Бројеви једнаки збировима 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, ... , представљени су тачкама поређаним у облику једнакостраничних троуглова:

Сл. 2

Због тога се бројеви једнаки збировима $1+2+\cdots+n$ за $n \in \mathbf{N}$ зову „*троугаони бројеви*“.

Десетогодишњим ученицима је показана слика 1 и указано је на то да се у квадратима тачке у сваком реду могу спојити по једном цртом. Свака црта у првом, другом, трећем и четвртом квадрату садржи 1, односно 2, 3, 4, тачке; број црта у квадратима је 1, односно 2, 3, 4. Према томе, укупан број тачака у квадрату се може добити као збир $1\cdot 1=1$, $2+2=2\cdot 2=2^2$, $3+3+3=3\cdot 3=3^2$, $4+4+4+4=4\cdot 4=4^2$. Зато се бројеви 1, 4, 9, 16 зову квадратни бројеви.

После тога ученицима је постављен

Задатак 12. Низ квадрата на слици 1 се може продужити, цртајући следеће квадрате са све већим бројем тачака. Нацртај квадрат који следи за квадратом са 16 тачака. Предложи разне начине за повезивање тачака цртама. У сваком случају одреди број тачака на свакој црти и помоћу тих бројева израчунај укупан број тачака у квадрату.

Ученици су радили у групама и заједничким напорима су добијени резултати на слици 3.

$25=5\cdot 5$	$25=$	$25=$
	$1+2+3+4+5$	$1+3+5+7+9$
	$+4+3+2+1$	

Сл. 3

Након тога следио је

Задатак 13. а) Направи цртеже сличне цртежима на слици 3 за разне квадратне бројеве. Користи своје цртеже за утврђивање броја свих тачака у одговарајућим квадратима.

б) Дај предлоге – без цртежа – за представљање броја 1000 у облику збира природних бројева.

После решења задатка 13 уследила је дискусија. Том приликом се испоставило да је ученицима постало јасно – без формалног доказа који се од деце у овом узрасту није могао очекивати – да квадратни бројеви n^2 за било који природни број n поседују следеће особине.

Збир првих n непарних бројева је n^2:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2 \tag{5}$$

$$n^2=1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1. \tag{6}$$

У вишим разредима гимназије доказ формула (5) и (6) је погодна вежба за усвајање методе математичке индукције за доказивање ставова који важе за све природне бројеве.

Испитивање збира $1+2+3+\cdots+n$ је обављено помоћу слика за троугаоне бројеве. Комбинацијом троуглова на слици 3 створени цу цртежи слични цртежима на слици 4.

$$2\cdot(1+2+3+4)=5\cdot 4$$

тј.

$$1+2+3+4=\frac{4\cdot 5}{2} \qquad\qquad \frac{4\cdot 5}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}=4^2$$

Сл. 4

Посматрајући низ сличних специјалних ситуација ученици су схватили суштину формула:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \tag{7}$$

и

$$t_n+t_{n+1}=(n+1)^2, \tag{8}$$

при чему t_n означава n-ти троугаони број.

Напомена. Троугаони бројеви имају низ интересантних особина, од којих се неке могу лепо приказати графички. Такве природе је особина која је била позната већ Плутарху (који је живео од око 46. до око 119. год):

- ако је t_n n-ти троугаони број, тада је $8t_n+1$ квадрат целог броја, и обрнуто,
- сваки квадратни број који је већи од 4 може се приказати у облику $8t_n+1$ за одређени троугаони број t_n.

Ученицима старим 12–13 година може се поставити задатак:

Задатак 14. Слика 5а) представља t_n (тј. $1+2+\cdots+n$) тачака поређаних тако да чине правоугли троугао Δ_n.

а) Од осам копија троугла Δ_n и од једне додатне тачке начинити квадрат Q. Одредити квадратни број који је представљен тачкама квадрата Q.

б) Од k^2 тачака направљена је квадратна слика Q. Показати да ако је $k^2>4$, тада се Q може раставити на осам конгруентних правоуглих троуглова Δ_n и на један квадрат са једном тачком.

(а) (б)

Сл. 5

в) Из решења делова а) и б) овог задатка извести закључак да важи став:

Природни број x је троугаони број ако и само ако је $8x+1$ квадрат целог броја.

Решење задатка 14 је илустровано на примеру $n=4$ на слици 5б).

У општем случају важи формула

$$8t_n + 1 = (2n+1)^2,$$

то јест

$$8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (2n+1)^2.$$

На крају бих хтела да скренем пажњу на то да се графичко представљање квадратних бројева погодно може искористити за налажење – не свих, али бесконачно много од решења „Питагорине једначине“

$$a^2 + b^2 = c^2$$

са природним бројевима a, b и c. На пример, из слике 6 се види исправност релације

$$n^2 + (2n+1) = (n+1)^2. \tag{9}$$

Наиме, мањи квадрат на слици 6 садржи n^2, а већи квадрат $(n+1)^2$ тачака. Број тачака у „коридору“ између ова два квадрата је $2n+1$.

Сл. 6

Да би се добила бар нека решења Питагорине једначине у природним бројевима, у формули (9) треба одредити n тако да $2n+1$ постане квадратни број. Нека је $2n+1$ облика $(2k+1)^2$ за произвољни природни број k. Из једначине $2n+1=(2k+1)^2$ следи

$$n = 2k^2 + 2k.$$

За ову вредност броја n формула (9) прима облик

$$(2k^2 + 2k)^2 + (2k + 1)^2 = (2k^2 + 2k + 1)^2.$$

Испитивања везана за ову тему су погодна за ученике у завршном разреду осмогодишње школе.

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] Z. Mihalewicz and D. B. Fogel: *How to solve it: Modern heuristics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2000.

[**2**] K.-H. Sänger: *Projektorientierter Mathematikunterricht Anregungen zum entdeckenden Lernen und Problemlösen*, Ph. D. Thesis, Erlangen.

IN MEMORIAM

Judita Цофман рођена је у Вршцу 1936. године. Студије математике и докторат у области геометрије завршила је на Универзитету у Новом Саду, где је неко време и радила. Средином шездесетих година одлази у Енглеску где се бави научним радом у области коначних геометрија, али већ тада почиње и њено интересовање за методику наставе математике. То сигурно није случајно. Свако од нас ко је имао прилику да чује њено предавање из геометрије лако је могао приметити да су њена предавања била веома добро припремљена, исказујући тако уважавање аудиторијума коме је намењено, а у складу с тим и постигнути ефекат. И наша предавања смо покушавали да припремимо у истом духу.

У свету је зато постала позната управо као методичар. Зато чланови Организационог одбора X југословенског конгреса математичара нису имали дилему: један предавач по позиву за методику математике, то је проф. др Јудита Цофман. Утисак учесника Конгреса, коментари и укупна атмосфера наметнули су редакцији часописа *Настава математике* и реализацију следеће идеје једногласно: штампати њено предавање с Конгреса у целини у часопису. Верујемо да ће утисак на читаоце, пре свега наставнике и професоре математике, овај чланак оставити исти као и на учеснике Конгреса, и да ће њиховим ученицима математика бити „лепша и занимљивија“, а њима самим позив професора и наставника још значајнији и одговорнији.

На жалост, прерана смрт Јудите Цофман спречила нас је да очекујемо следећи сусрет с њом и њеним предавањем, којим никог не оставља равнодушним.

Н. Бокан