**Мр Миомир Анђић**

# РЈЕШАВАЊЕ ЕКСТРЕМАЛНИХ ЗАДАТАКА ЕЛЕМЕНТАРНИМ ПУТЕМ, I

Екстремне вриједности појединих функција могу се одредити и без познавања њихових извода. Иако диференцијални рачун даје неприкосновене методе за одређивање екстремних вриједности функција, посебан интерес побуђују групе функција чије се екстремне вриједности могу одредити елементарно (без примјене извода). О њима ће бити ријечи у овом чланку.

Како се ученици средње школе са појмом извода срећу тек у четвртом разреду, то изложени материјал може бити од користи како њима тако и члановима група младих математичара, као и њиховим наставницима. У том циљу дат је већи број задатака које ученици могу самостално рјешавати.

У чланку ће бити доказане извјесне теореме помоћу којих са лакоћом одређујемо екстремне вриједности елементарним путем. Како функција може имати више локалних максимума и минимума, нас ће занимати само апсолутни максимум и минимум, тј. највећа и најмања вриједност функције на датом интервалу, односно у датој области.

Међу проблемима који слиједе дотаћи ћемо се и неких „малих" изопериметријских проблема, јер њихово детаљније проучавање може бити посебна тема за разматрање. Већи број примјера односиће се на одређивање највеће и најмање вриједности функција више промјенљивих. У рјешавању осталих проблема користићемо елементарне чињенице, које ради ефикасности дајемо укратко.

(i) Функција облика $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ за $x=-\dfrac{b}{2a}$ има максимум – највећу вриједност (минимум – најмању вриједност) $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ ако је $a<0$ $(a>0)$.

(ii) Функција $f(x)=\dfrac{a}{g(x)}$, $a>0$, $g(x)>0$ достиже највећу (најмању) вриједност за оне вриједности $x$ за које $g(x)$ достиже најмању (највећу) вриједност.

(iii) Како су $x^n$ ($x>0$ или $n$ непаран природан број), $\sqrt[n]{x}$, $a^x$, $\log_a x$ стриктно растуће (опадајуће) функције за $n\in\mathbf{N}$ и $a>1$ $(0<a<1)$, то функције $f(x)=(g(x))^n$ ($n$ непаран број), $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, $f(x)=a^{g(x)}$ и $f(x)=\log_a g(x)$ у области дефинисаности достижу највећу (најмању) вриједност за $a>1$ и

Саопштено на X конгресу математичара Југославије, Београд, јануара 2001.

оне вриједности $x$ за које $g(x)$ достиже највећу (најмању) вриједност. Ако је $0 < a < 1$, имамо обрнут случај, тј. највећа (најмања) вриједност се достиже за оне вриједности $x$ за које $g(x)$ достиже најмању (највећу) вриједност.

Коначно, биће показано како се у рјешавању поменутих проблема може успјешно користити позната веза аритметичке и геометријске средине бројева, својство осне симетрије и неједнакост Коши-Буњаковског за скаларни производ вектора.

Подсјетимо се:

$1^\circ$ Ако су $a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, реални бројеви, тада за изразе

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \quad a_i > 0,$$

кажемо да су аритметичка и геометријска средина тих бројева. За ове средине важи неједнакост $G_n \leqslant A_n$, гдје се једнакост достиже онда и само онда када је

$$(*) \qquad a_1 = a_2 = \cdots = a_n.$$

$2^\circ$ За произвољне векторе $\vec{a}$ и $\vec{b}$ важи неједнакост Коши-Буњаковског

$$(**) \qquad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\,|\vec{b}|,$$

гдје је $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$ њихов скаларни производ.

Теорема 1. *Ако је збир* $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ *позитивних реалних бројева* $x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ *константан, тада производ* $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ *достиже највећу вриједност када су ти бројеви међусобно једнаки.*

*Доказ.* Ова теорема је последица релације $G_n \leqslant A_n$ ($1^\circ$). Из ње слиједи $\sqrt[n]{P} \leqslant \dfrac{S}{n}$, тј. $P \leqslant \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$. Очигледно највећа вриједност за $P$ је $\left(\dfrac{S}{n}\right)^n$, а она се достиже, на основу $(*)$ , ако је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Примједба 1. Доказ претходне теореме можемо извести и на сљедећи начин.

Нека сталан збир позитивних бројева $x_i$ износи $nk$. Претпоставимо супротно ономе што треба да се докаже, да сви фактори нијесу једнаки броју $k$. Тада постоје бар два од њих таква да је један већи, а други мањи од $k$. Нека је, не умањујући општост, $x_1 = k + l$, $x_2 = k - m$, гдје су $l$, $m > 0$. Да се збир не би промјенио, одузмимо од $x_1$ број $l$, а броју $x_2$ додајмо $l$, тада је производ тих нових фактора већи од пређашњег, јер је

$$k(k - m + l) > (k + l)(k - m).$$

Оваквим размишљањем можемо доћи до тога да имамо само два фактора различита од $k$, чији је збир $2k$. Један од тих фактора је $k + l$, а други $k - l$, гдје је $l > 0$. Умањимо први фактор за $l$, а други повећајмо за исти број; производ је опет увећан, јер је

$$k^2 > k^2 - l^2 = (k + l)(k - l).$$

Дакле, све док су два фактора различита, производ се може увећати а да се збир не мијења.

Примједба 2. Ако је у претходном тврђењу $n = 2$, имамо

$$4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2, \quad \text{односно} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{S^2 - (x_1 - x_2)^2}{4}.$$

Производ $x_1 \cdot x_2$ имаће највећу вриједност када је $(x_1 - x_2)^2$ најмање, а то ће се десити ако је $(x_1 - x_2)^2 = 0$, тј. за $x_1 = x_2$. Ако фактори $x_1$ и $x_2$ не могу бити једнаки, производ $x_1x_2$ је максималан кад је $|x_1 - x_2|$ минималан.

Ово важи без услова да су $x_1$ и $x_2$ позитивни, тј. они могу бити произвољни бројеви са константним збиром.

Теорема 2. *Ако је збир $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ позитивних реалних бројева $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ константан, тада производ $P = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, гдје $k_1$, $k_2$, ..., $k_n \in \mathbf{N}$, достиже највећу вриједност када је $\dfrac{x_1}{k_1} = \dfrac{x_2}{k_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{k_n}$.*

*Доказ.* Производ $P = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ достиже највећу вриједност када и израз $\dfrac{P}{k_1^{k_1} \cdot k_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot k_n^{k_n}}$, гдје је

$$\frac{x_1^{k_1}}{k_1^{k_1}} \cdot \frac{x_2^{k_2}}{k_2^{k_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n^{k_n}}{k_n^{k_n}} = \underbrace{\frac{x_1}{k_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x_1}{k_1}}_{k_1 \text{ пута}} \cdot \underbrace{\frac{x_2}{k_2} \cdot \ldots \cdot \frac{x_2}{k_2}}_{k_2 \text{ пута}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{x_n}{k_n} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{k_n}}_{k_n \text{ пута}}.$$

Како је

$$\underbrace{\frac{x_1}{k_1} + \cdots + \frac{x_1}{k_1}}_{k_1 \text{ пута}} + \underbrace{\frac{x_2}{k_2} + \cdots + \frac{x_2}{k_2}}_{k_2 \text{ пута}} + \cdots + \underbrace{\frac{x_n}{k_n} + \cdots + \frac{x_n}{k_n}}_{k_n \text{ пута}} =$$
$$= k_1 \cdot \frac{x_1}{k_1} + k_2 \cdot \frac{x_2}{k_2} + \cdots + k_n \cdot \frac{x_n}{k_n} = S,$$

то према теореми 1 претходни производ достиже највећу вриједност ако су чиниоци једнаки, тј. $\dfrac{x_1}{k_1} = \dfrac{x_2}{k_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{k_n}$.

Примједба 3. Претходни закључак важи и ако су $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ рационални бројеви.

Нека је $k_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$, $k_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$, ..., $k_n = \dfrac{p_n}{q_n}$. За оне вриједности $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ за које производ $x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ достиже највећу вриједност, највећу вриједност достиже и $(x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n})^{q_1 q_2 \cdots q_n}$, тј. израз $x_1^{p_1 q_2 q_3 \cdots q_n} x_2^{p_2 q_1 q_3 \cdots q_n} \cdots x_n^{p_n q_1 q_2 \cdots q_{n-1}}$, гдје су $p_1q_2q_3 \cdots q_n$, $p_2q_1q_3 \cdots q_n$, ..., $p_nq_1q_2 \cdots q_{n-1}$ природни бројеви, а то је онда, на основу теореме 2, када је $\dfrac{x_1}{p_1q_2q_3 \cdots q_n} = \dfrac{x_2}{p_2q_1q_3 \cdots q_n} = \cdots = \dfrac{x_n}{p_nq_1q_2 \cdots q_{n-1}}$, тј. $x_1 : x_2 : \cdots : x_n = k_1 : k_2 : \cdots : k_n$.

Теорема 3. Ако је производ $P = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ позитивних реалних бројева $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ константан, тада збир $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ достиже најмању вриједност када су ти бројеви међусобно једнаки.

*Доказ.* И ова теорема, као и теорема 1, посљедица је релације $G_n \leqslant A_n$, одакле слиједи $S \geqslant n\sqrt[n]{P}$. Најмања вриједност $n\sqrt[n]{P}$ се достиже за $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Примједба 4. Претходну теорему можемо доказати и на сљедећи начин.

Нека је производ $P$ сталан и једнак $k^n$. Када сабирци $x_i$ не би били једнаки, постојао би бар један од њих који је већи од $k$ и бар један који је мањи од $k$. Нека је $x_1 = k+l$, $x_2 = k-m$, гдје је $l, m > 0$. Замијенимо $x_1$ са $k$ и, да производ остане сталан, $x_2$ са $\dfrac{(k+l)(k-m)}{k}$. Збир се сада умањио јер је $k + \dfrac{(k+l)(k-m)}{k} < k + l + k - m$, односно $-lm < 0$, што је очигледно тачно. Тако се умањио за јединицу број сабирака различитих од $k$. На тај начин можемо наставити и доћи до тога да имамо само два сабирка различита од $k$ чији је производ $k^2$. И та два сабирка замијенимо са $k$. Сваком од тих трансформација умањио се збир, а производ остаје исти.

Када су сви чиниоци остали једнаки, збир достиже најмању вриједност, јер свака модификација која би учинила два сабирка неједнаким увећала би вриједност збира.

Примједба 5. Ако је у претходном тврђењу $n = 2$, имамо

$$(x_1 + x_2)^2 = 4x_1x_2 + (x_1 - x_2)^2.$$

Пошто су $x_1$ и $x_2$ позитивни, онда ће $x_1 + x_2$ достићи најмању вриједност истовремено када и израз $(x_1 + x_2)^2$, а то је у случају када је $x_1 - x_2 = 0$, тј. када је $x_1 = x_2$.

Теорема 4. Ако је производ $P = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, гдје су $x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ позитивни реални бројеви, а $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbf{N}$, константан, тада збир $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ достиже најмању вриједност када је $\dfrac{x_1}{k_1} = \dfrac{x_2}{k_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{k_n}$.

*Доказ.* Ова теорема се доказује на исти начин као и теорема 2.

Изложена тврђења ће нам, поред осталог, омогућити да докажемо неке познате неједнакости.

Слиједе примјери примјене.

## Неки изопериметријски проблеми[1]

Примјер 1. Од свих троуглова датог обима одредити онај коме је површина највећа.

Површина троугла чије су странице дужина $a$, $b$ и $c$ износи

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

[1] Под изопериметријским проблемом подразумјевамо проблем да се од свих равних фигура датог обима (периметра – отуда и назив проблема) одреди фигура највеће површине. Проблем је био познат још у антично доба. Легенда о постанку Картагине, на примјер, говори да је град био саграђен на земљишту које се могло ограничити конопцем одређене дужине (погодба при куповини земљишта).

гдје је $a+b+c=2s$. $P$ има највећу вриједност када $P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$, односно $(s-a)(s-b)(s-c)$ има највећу вриједност, јер је $s$ сталан број. Како је збир чинилаца $s-a+s-b+s-c=s$ сталан, површина је највећа када су сви чиниоци једнаки (теорема 1), тј. када је $s-a=s-b=s-c$, тј. $a=b=c$. Дакле, тражени троугао је једнакостранични.

Примјер 2. Од свих правоугаоника датог обима одредити онај коме је површина највећа.

Површина правоугаоника чије су странице дужина $x$ и $y$ је $P=xy$. Како је $2(x+y)=O$ сталан број, то је и $x+y=O/2=s$ сталан број. Према теореми 1 израз $P$ достиже максималну вриједност ако су чиниоци $x$ и $y$ једнаки, тј. $x=y$, па је тражени правоугаоник квадрат.

До истог закључка могли смо доћи и на сљедећи начин. Из релације $x+y=s$ се добија $y=s-x$, што замјеном у $P$ даје $P=x(s-x)=-x^2+sx$. Како је коефицијент уз квадратни члан негативан ($a=-1$), то ова функција има највећу вриједност за $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{s}{2}$. Даље је и $y=s-\dfrac{s}{2}$, тј. $x=y=\dfrac{s}{2}$, одакле слиједи претходни закључак.

Примјер 3. Од свих кружних исјечака обима $2p$ наћи онај са највећом површином.

Нека је дат кружни исјечак $OAB$ (слика 1) са централним углом $\alpha$, полупречником $r$ и одговарајућим кружним луком дужине $l$. Према услову задатка је $2r+l=2p$, одакле је $l=2(p-r)$. Површина кружног исјечка је $P=\dfrac{rl}{2}=r(p-r)=-r^2+pr$. Она достиже максимум за $r=\dfrac{p}{2}$, односно $l=2\left(p-\dfrac{p}{2}\right)=p$.

Сл. 1

Сл. 2

Примјер 4. Од свих четвороуглова са датим страницама највећу површину има тетивни четвороугао.

Нека су странице четвороугла $a$, $b$, $c$, $d$; $\alpha$ угао између страница $a$ и $b$ и $\gamma$ угао између страница $c$ и $d$ (слика 2). Тражени четвороугао мора бити конвексан, јер за сваки неконвексан постоји конвексан са истим дужинама страница и већом површином. Са слике се закључује да важи $P=\dfrac{ab}{2}\sin\alpha+\dfrac{cd}{2}\sin\gamma$ и $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=c^2+d^2-2cd\cos\gamma$. Из последње релације имамо $\dfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-d^2)=$

$ab\cos\alpha - cd\cos\gamma$, одакле и на основу прве двије добијамо

$$16P^2 = 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2) - 8abcd(1+\cos(\alpha+\gamma)).$$

Растављањем разлике квадрата на десној страни ове једнакости на чиниоце, коришћењем једнакости $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$ и $a+b+c+d=2s$, добијамо површину датог четвороугла

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

Површина је очигледно највећа ако је $\cos^2\dfrac{\alpha+\gamma}{2} = 0$, тј. $\alpha+\gamma = 180^\circ$, па је и збир остала два угла $180^\circ$, што значи да се ради о тетивном четвороуглу чија је површина $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, $s = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Примјер 5. Од свих тетивних четвороуглова датог обима, квадрат има највећу површину.

Према претходном примјеру површина тетивног четвороугла је

$$P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

$P$ има максимум истовремено кад и $P^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$. Како је $s-a+s-b+s-c+s-d = 2s = O$ сталан број, то према теореми 1 израз $P^2$ достиже максимум ако је $s-a = s-b = s-c = s-d$, тј. за $a=b=c=d$, а пошто се ради о тетивном четвороуглу, у питању је квадрат.

## Још неки геометријски проблеми

Примјер 6. Од свих троуглова који имају исту површину једнакостранични троугао има најмањи обим.

Заиста, полазећи од једнакости $\dfrac{\sqrt{P}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\dfrac{s}{3}(s-a)(s-b)(s-c)}$ и коришћењем неједнакости геометријске и аритметичке средине бројева $s/3$, $s-a$, $s-b$, $s-c$ лако је установити неједнакост $\dfrac{\sqrt{P}}{\sqrt[4]{3}} \leqslant \dfrac{s}{3}$, тј. $2s \geqslant 2\sqrt[4]{27}\sqrt{P}$, за сваки троугао, и на крају показати да једнакост у њој важи ако и само ако је троугао једнакостраничан.

Примјер 7. Од свих правоуглих троуглова са истом хипотенузом највећу површину има једнакокрако правоугли троугао.

Нека су катете правоуглог троугла дужине $a$ и $b$ а хипотенуза $c$, тада је његова површина $P(a) = \dfrac{a}{2}\sqrt{c^2-a^2}$. Она достиже максимум истовреемно кад и $P^2(a) = \dfrac{a^2}{4}(c^2-a^2)$. Означимо $a^2$ са $x$, тада функција $P^2(x) = \dfrac{x}{4}(c^2-x) = -\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{c^2}{4}x$ има максимум за $x = \dfrac{c^2}{2}$, одакле је $a = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$. Тада је и $b = \sqrt{c^2-a^2} = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$, па је троугао једнакокрако правоугли.

Примједба 6. При налажењу максимума било које функције облика $f(x) = ax\sqrt{b-cx^2}$, $a,b,c,x>0$, може се примјенити претходни поступак.

Примјер 8. Око круга полупречника дужине $r$ описати једнакокраки троугао најмање површине.

Нека је основица троугла дужине $x$ а висина $h$ (слика 3). Ако су углови на основици $2\alpha$, имамо $|AD| = x/2$, $|CD| = h$, $|OD| = r$, а $\angle OAD = \angle OAE = \alpha$, јер је $O$ на симетрали унутрашњег угла код тјемена $A$. Из $\triangle ADO$ налазимо да је $x = \dfrac{2r}{\operatorname{tg}\alpha}$, а из $\triangle ADC$ да је $h = \dfrac{x}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$. Површина троугла је

$$P = \frac{xh}{2} = \frac{2r^2}{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

$P$ има најмању вриједност за оне вриједности $\alpha$ за које $P^2 = \dfrac{4r^4}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$ има најмању вриједност, а то ће се десити када израз $\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2$ има највећу вриједност.

Сл. 3

Како је $\operatorname{tg}^2\alpha > 0$, $1-\operatorname{tg}^2\alpha > 0$ $(0 < a < 45^\circ)$ и $\operatorname{tg}^2 + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$, то се према теореми 2 максимум достиже ако је $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2}$, одакле је $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{3}$, односно $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Слиједи да је $\alpha = 30^\circ$, па су углови на основици једнакокраког троугла по $60^\circ$, што говори да се ради о једнакостраничном троуглу.

Примјер 9. У лопту полупречника $R$ уписати квадар највеће запремине.

Нека су димензије квадра $x$, $y$ и $z$, тада је $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$ и запремина квадра $V = xyz$. $V$ остиже максимум када и $V^2 = x^2y^2z^2$ достиже максимум. То ће се према теореми 1 десити ако је $x^2 = y^2 = z^2$, одакле на основу релације $x^2+y^2+z^2 = 4R^2$ налазимо да је $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{4R^2}{3}$, односно $x = y = z = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. Дакле, тражени квадар је коцка ивице $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ чија је запремина $V = \dfrac{8}{9}R^3\sqrt{3}$.

Примјер 10. Око лопте полупречника $R$ описати праву кружну купу најмање запремине.

Према ознакама на слици, гдје је $|AB| = 2r$, $|CS| = h$ и примјеру 10 имамо: $r = R\operatorname{ctg}\alpha$ и $h = r\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2R}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, одакле се добија запремина купе

$$V = \frac{2}{3}\frac{R^3\pi}{\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}.$$

Функција $V$ достиже најмању вриједност онда када $\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ има највећу вриједност. Како је $\operatorname{tg}^2\alpha > 0$, $1-\operatorname{tg}^2\alpha > 0$ за $0 < a < \pi/4$ и $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha = 1$, то према теореми 1 израз $\operatorname{tg}^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ достиже највећу вриједност ако је $\operatorname{tg}^2\alpha = 1-\operatorname{tg}^2\alpha$, одакле је $\operatorname{tg}^2\alpha = 1/2$, односно $\operatorname{tg}\alpha = 1/\sqrt{2}$. Отуд слиједи да је $r = R\sqrt{2}$ и $h = 4R$.

Сл. 4

Наставак у следећем броју