НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2002, XLVII, 3–4, стр. 1–6

Др Бранислав Чабрић

ПРОБЛЕМ ТРИСЕКЦИЈА УГЛА ИСТОРИЈА, ИНСТРУМЕНТИ И ИСТРАЖИВАЊА

У овом чланку су приказани неки интересантни детаљи из историје трисекција угла пред Француском академијом наука и из првог научног открића и великог разочарења, нашег великог научника светског гласа Милутина Миланковића, које је управо решење проблема трисекција угла. Показано је да се аналитичким решавањем проблема трисекција угла добија једначина трећег степена, што значи да се трисекција угла не може извршити помоћу лењира и шестара. Поред тога приказан је оригиналан инструмент за трисекцију угла, који је аутор чланка конструисао. Недавно је на бази трисекције угла откривена теорема у геометрији троугла.

Чланак приказује плод вишедеценијског истраживања аутора у области трисекције угла. Намењена је свима који желе да нешто више сазнају о историји, интрументима и истраживањима трисекције углова.

1. Нада наивних нематематичара

Стари грчки математичари много су се бавили конструктивним геометријским задацима. Они су многе проблеме које ми данас решавамо алгебарски решавали чисто геометријски, а при конструкцији су дозвољавали себи само употребу лењира (нескалираног) и шестара. Порекло овог услова је у томе што су они сматрали праву и круг за савршене линије. Зато су већ у њихово време били уочени неки конструктивни задаци који се на тај начин не могу решити. Неки од тих задатака су временом постали чувени, а један од њих је и проблем трисекција угла.

Проблем трисекција угла се састоји у томе да се само помоцу шестара и лењира подели дати произвољни угао на три једнака дела. Тај проблем нема решења, тј. није могуће наћи поступак за поделу произвољног угла на три једнака дела само помоцу шестара и лењира. Али то је доказано тек у претпрошлом веку (француски академик P. Wentzell 1837. године). Дотле су, међутим, не само многи чувени математичари, него и многи слаби познаваоци математике покушавали да га реше, ови последњи често и зато што су за решење расписиване велике награде. Сада се пак математичари не баве више тим проблемом. Њиме се баве још неки пут само људи који не знају матеметику, па им се чини да могу наћи решење и за оно што је нерешиво.

Извести, међутим, трисекцију угла другим инструментима, који цртају друге сложеније алгебарске криве линије, могуће је. Шестаром и лењиром задатак се, за произвољни угао, може решити само приближно, и то по жељи великом тачношћу [1].

2. Упорност наивних нематематичара

Овај чувени проблем, који је од вајкада занимао и математицаре од заната и лаике, занимаће и убудуће бар оне који не знају тачно у чему се он састоји, али знају толико да је то нешто око чега су се ломила многа копља, па је ипак посао остао несвршен. Први појам о том проблему бар привидно је приступачан свакоме, па и ономе који једва има прве, основне, геометријске и рачунске појмове. И та је привидна приступачност и чинила да су о њему мислили и највише расправљали баш они који су за то најмање позвани, и чиниће да тако буде и у будућности. Прави смисао проблема јасан је само онима који су довољно упућени у питања математичке анализе, а такви се сигурно неће више њиме бавити.

У историји француске Академије наука од 1775. године налази се записана одлука Академије, да више неће улазити у испитивање решења проблема квадратура круга, трисекција угла и удвајање коцке, која би јој била поднета ма од чије стране. У објави, Академија одлучно пориче да је у Академији резервисана знатна сума новца за награду срећном проналазачу решења једног од тих проблема, стоји од речи до речи ово: „Стално се проносе гласови да је француска влада одредила велику награду ономе који реши једно од горњих питања. Верујући у те лажне вести, маса људи лишена сваког математичког знања, одаје се таквим беспредметним пословима, запуштајуци своје праве послове и своје породичне бриге. Њихова упорност прелази у лудило, које је утолико теже за лечење што су проналазачи, који немају појма о правом смислу проблема, и који су неспособни да разумеју ни о чему се ради, убеђени да их је Провиђење нарочито одредило да траже и нађу решење проблема и да они за своје успехе у томе имају да захвале једној врсти инспирације која не наилази на праве научнике“ [2].

3. Решење и разочарење матуранта Милутина Миланковића

Прво научно откриће и велико разочарење, нашег великог научника светског гласа Милутина Миланковића било је управо решење проблема трисекција угла. Наиме, после матуре (јуни 1896) а пре одласка на студије грађевинске технике, октобра месеца у Беч, имао је доста времена. То време искористио је да посети рођаке и пријатеље породице Миланковић у Београду. Том приликом набавио је и свеску LI „Глас Српске краљевске академије“ која је те године изашла из штампе. У тој свесци „Гласа“ нашао је опширну расправу (72 странице) академика Љубомира Клерића под насловом „Тракториограф и конструисање Лудолфовог броја π и основице e природних логаритама“. У том раду је било на коректан начин показано да се класични проблем ректификација (односно квадратура) круга, истина само употребом шестара и лењира не може решити, али се другим инструментима, његовим тракториографом који црта трактрисе, трансцендентне криве, то може постици.

Миланковић каже у својим Успоменама [3]: „Већ сам тај наслов ме живо заинтересовао, јер сам, и са уским знањем средњошколске математике, могао да схватим о чему се у тој расправи ради, тим пре што ме је мој професор Варићак лично обавестио о нечем што није сматрао интересантним за остале моје другове“. То обавештење се односило на три чувена стара проблема, а то су поред квадратуре круга, трисекција угла и удвостручење коцке. Било је већ доказано да се ниједан од ових проблема не може решити само шестаром и лењиром, тј. да се не може никако свести само на цртање правих линија и кругова. Клерић је показао да се за проблем квадратура круга то може постићи цртањем трактрисе.

На Миланковића је то начинило велики утисак; чак и само упознавање са једним новим инструментом, јер он до тада осим шестара и лењира друге није познавао. Стога је себи поставио задатак да на неки нацин реши трисекцију угла „која је лакши проблем“ како он каже. Он је размишљајући о томе у својој башти на дрвеној клупи „која је тог дана била орендисана и имала глатку белу површину“ нацртао решење траженог проблема. Међутим, несрећа је била у томе што је тај проблем вец био решен на исти начин, што он, наравно није знао. Миланковиц је проблем трисекција угла решио у истом оном смислу у којем је Клерић решио проблем квадратура круга – помоћу криве која се зове конхоида [3].

4. Немогућности лењира и шестара

У елементарној геометрији не постоји алгоритам којим би се, у општем случају, могло одредити који се конструктивни задатак може решити помоћу лењира и шестара, а који не; одговор на ово питање добија се применом аналитичке геометрије, уз теорију алгебарских једначина. Анализирајући елементарне конструкције, лако је увидети да се сваки конструктивни проблем може свести на одређивање тражених тачака, полазећи од датих тачака у фигури. Свака нова тачка у процесу конструкције добија се било у пресеку две праве, било у пресеку праве и круга, или у пресеку два круга. Праве у аналитичкој геометрији представљају се линеарним једначинама облика

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

а кругови једначинама другог степена облика

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0. \tag{2}$$

Према томе, проналажење координата нових тачака своди се на решавање система од две једначине, од којих је свака било типа (1), било типа (2) [4]. Аналитичким решавањем проблема трисекција угла добија се (позната) тригонометријска једначина

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$$

која супституцијом $\cos\alpha = a$ и $\cos\dfrac{\alpha}{3} = x$ прелази у алгебарску једначину

$$4x^3 - 3x - a = 0. \tag{3}$$

Може се показати да се ова кубна једначина (3) за произвољну вредност a, тј. угла α не може разложити на систем од две једначине, типа (1) и (2). То значи да није могуће помоћу шестара и лењира поделити угао на три једнака дела. Када је угао $\alpha = 90^\circ/2^n$, где је $n = 1, 2, 3, \ldots$, једначина (3) се може разложити на једначине типа (1) и (2), тј. трисекција се може извршити помоћу шестара и лењира [4–6].

5. Нови инструмент за трисекцију

За трисекцију угла изумено је више механичких направа. Неки од ових механизама служе за цртање кривих линија помоћу којих се решава једначина за трисекцију угла; други решавају трисекциону једначину непосредно или непосредно врше поделу угла на три једнака дела [6, 7].

Сл. 1. Инструмент за трисекцију тупих углова

Ја сам консртуисао инструменте за непосредну поделу угла на три једнака дела [8–12] (један од њих је приказан на слици 1). Он се састоји од три лењира једнаке дужине (растојања $AB = BC = CD$) који су повезани помоћу осовиница у тачкама B и C. У тачки D се налази игла која клизи дуж пропреза. Када се лењир CB постави под углом 3α према линији AC, тада лењир AB заклапа угао α. Доказ: у $\triangle ABC$ (сл. 2) имамо $\gamma = \alpha + \alpha$ и у $\triangle ACD$ имамо $\beta = \alpha + \gamma$ из чега следи да је $\alpha = \beta/3$.

Сл. 2. Уз доказ да је рад инструмента исправан

6. Истраживање са трисекцијом угла

Међу бројним теоремама о геометрији троугла, посебно је занимљива Морлејева (Morley) теорема („чудо над чудима“ [13]), делом због онога што она саопштава, а делом због времена када је откривена (она је откривена 1899. године тј. у време када се мислило да су све чињенице о значајним тачкама, линијама и круговима над троуглом откривене).

Сл. 3. Илустрација Морлејеве теореме

Морлејева теорема тврди да ако се у ма ком троуглу ($\triangle ABC$) (сл. 3) конструишу полуправе које сваки од унутрашњих углова деле на три једнака дела, онда ће три пресечне тачке одговарајућих парова полуправих бити темена једнакостраничног троугла ($\triangle A'B'C'$) (Морлејев троугао).

Сл. 4. Проширење Морлејеве теореме

Ако се једнакостраничан троугао $\triangle A'B'C'$ (сл. 3) направи од круте жице и троглови $\triangle ABC'$, $\triangle BCA'$ и $\triangle ACB'$ направе од конца, ја сам нашао да се добија механички модел Морлејеве теореме и истовремено инструмент за трисекцију углова. Када се изврши трисекција спољашњих углова троугла ($\triangle ABC$) (сл. 4), на рачунару помоћу програма CorelDRAW, ја сам нашао три пресечне тачке парова полуправих које су темена једнакостраничног троугла ($\triangle A'B'C'$) (проширење Морлејеве теореме на спољашње углове [14]).

7. Домети неког проблема и резултата

Потребне су детаљне анализе приликом одређивања смисла и домета неког проблема и резултата. Већ споменуто питање квадратуре круга довело је до појма трансцендентног броја и до веома значајне теорије реалних бројева. А то је изгледало као задатак, који је са гледишта своје формулације наивнији од многих средњошколских задатака. Има толико незаобилазних резултата да је очигледно да би наука битно другачије изгледала да њих није било. Далеко од тога да се ово може рећи за све резултате, што ипак не значи њихову деградацију. Ако је резултат тривијалан, ни то само по себи не значи да се до њега врло лако дошло. Може се до тривијалног доћи и после веома тешких спекулација, а прост поступак до кога се дошло у прави час може довести до нечег значајног. И у математици временска дистанца у многим случајевима омогућава коначан суд. Нешто што је изгледало врло важно и сложено пређе у неку од скромнијих категорија. Нешто на изглед тривијално оправда се неким касније уоченим посебним осветљењем. Има и манипулација, које су ипак реткост, да се на свестан и систематски начин безначајни искази заодевају у вишу научну форму.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Calandreau, E., *Celebres Problemes Mathematiques*, Albin Michel, Paris, 1949., str. 299.
[2] Петровић, М., *Квадратура круга и трисекција угла пред Француском академијом наука*, Српски књижевни гласник, књ. 24, бр. 5 (1928) стр. 368.
[3] Миланковић, М., *Успомене, доживљаји и сазнања. Детињство и младост (1897-1909)*, САНУ, Београд, 1979., стр. 156.
[4] Цофман, J., *Решавање одабраних конструктивних задатака помоћу лењира и шестара*, Завод за физику и математику, Универзитет у Новом Саду, 1964., стр. 9.
[5] Klein, F., *Famous Problems and other Monographs*, Chalsea Publ. Comp., New York, 1980., str. 13.
[6] Yates, R. C., *The Trisection Problem*, The National Council of Teachers of Mathematics (USA), Reston, 1971.
[7] Dudley, U., *The Trisectors*, The Mathematical Association of America, Washington, 1994.
[8] Čabrić, B., *Mechanical device for angle division into three equal sections*, Math. Educ. (Japan), LXXI, No. 5, 33 (1989).
[9] Чабрич, Б., *О трисекции угла и удвоении куба*, Квант (Русија), 5, 62 (1990).
[10] Čabrić, B., *A device for angle trisectioning*, Arkhimedes (Finska), No. 1, 24 (1991).
[11] Čabrić, B., Arnaut, S., *Angle trisection scissors*, Archimedes (Južnoafrička Republika), 38, No. 4, 45 (1996).
[12] Čabrić, B., Stojanović, D., *Trisection and triangle*, Tenrag (Australia), February, 56, (2001).
[13] Newman, D. J., *The Morley Miracle*, The Mathematical Intelligencer, 18, No. 1, 31 (1996).
[14] Lavrič, B., *Razširitev Morleyevega izreka*, Presek (Slovenija), 21, No. 6, 376 (1993/94).