НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

Стојан Величковић

ПОТЕНЦИЈА ТАЧКЕ У ОДНОСУ НА КРУЖНИЦУ

Неколико пута се дешавало да се на неком такмичењу задају задаци за чије решавање је било потребно имати знање везано за потенцију тачке у односу на кружницу. Како последњих година у „Настави математике“ није било прилога који би се односили на ову тему елементарне геометрије, сматрамо да би овај прилог могао да попуни ту празнину.

1. Нека је дата кружница k и тачка P у равни ове кружнице и нека произвољне праве p и q које садрже тачку P секу ову кружницу у тачкама A и B, односно C и D. *Производ дужи PA и PB, односно PC и PD које кружница одређује на свакој од сечица које садрже исту тачку P, константан је.*

Сл. 1

Сл. 2

Доказ. (а) Претпоставимо најпре да је, као на слици 1, тачка P у спољашњој области кружнице k. Како је $\triangle PAD \sim \triangle PCB$ (угао P је заједнички, а $\angle PBC = \angle PDA$ као периферијски углови над истим кружним луком AC), то је $PA : PC = PD : PB$, односно $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

(б) Нека је сада тачка P у унутрашњој области кружнице k, сл. 2. Како је $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ (угао P је заједнички, $\angle PAC = \angle PDB$ као периферијски над луком CB), то је поново $PA : PC = PD : PB$, односно $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Речима: производ дужи на које тачка P дели сваку од тетива кружнице које садрже ову тачку, константан је. Важи и обратно тврђење: *ако се праве p и q секу у тачки P, ако тачке A и B припадају правој p, а тачке C и D правој q и ако је $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, тада тачке A, B, C и D припадају истој кружници.*

2. *Нека је P тачка у спољашњој области кружнице k, p тангента те кружнице која садржи тачку P и додирује кружницу у тачки M и нека је q сечица која садржи тачку P и кружницу k сече у тачкама A и B. Тада важи $PM^2 = PA \cdot PB$.*

Доказ. Како је PM тангента кружнице k која одговара тачки P, то је $\triangle PAM \sim \triangle PMB$ (угао P је заједнички, $\angle AMP = \angle MBP$ јер је $\angle MBP$ периферијски над тетивом AM кружнице k, а $\angle AMP$ је угао између те тетиве и тангенте p), сл. 3. Зато је $PA : PM = PM : MB$, односно добијамо $PM^2 = PA \cdot PB$. Важи и обратно тврђење: *ако је PM тангентна дуж кружнице k из тачке P и ако за тачке A и B праве која садржи тачку P важи $PM^2 = PA \cdot PB$, тада тачке A и B припадају кружници k.*

Сл. 3 Сл. 4

Дефиниција. Вредност производа $PA \cdot PB$ дужи које кружница k одређује на произвољној правој кроз тачку P, односно (у случају 2.) квадрат PM^2 тангентне дужи из тачке P на кружницу k, назива се *потенцијом тачке P у односу на кружницу k.*

Задаци

1. Применом особина потенције тачке у односу на кружницу доказати Питагорину теорему.

Нека је ABC троугао са правим углом код темена C. Конструишимо кружницу $k(A, b)$, сл. 4. Како је $BC \perp AC$, то је $AC = b$ додирни полупречник кружнице k, а BC је тангентна дуж ове кружнице која одговара тачки B. Тада је, према претходном, $BC^2 = BD \cdot BE$, односно, према уведеним ознакама на слици, $a^2 = (c - b)(c + b)$, тј. $a^2 = c^2 - b^2$. Следи да је $c^2 = a^2 + b^2$.

2. Конструисати кружницу која садржи дате тачке A и B и која додирује дату праву p.

Анализа. Претпоставимо да је задатак решен и нека тражена кружница са средиштем O додирује дату праву p у тачки M, сл. 5. Нека је k произвољна кружница са средиштем S која садржи тачке A и B и нека је $AB \cap p = \{P\}$. Ако је PC тангентна дуж конструисана на кружницу k из тачке P, а с обзиром да је PM тангентна дуж конструисана из исте тачке P на тражену кружницу чије је средиште тачка O, то је, према претходном, $PC^2 = PA \cdot PB$ и $PM^2 = PA \cdot PB$, одакле следи да је $PM = PC$.

Конструкција. Потребно је конструисати било коју кружницу k која садржи тачке A и B, па одредити $AB \cap p = \{P\}$. Затим треба конструисати на кружницу k тангентну дуж PC. Кружница конструисана око тачке P полупречником PC сече дату праву p у двема тачкама, M и M_1, и то су додирне тачке двеју кружница са правом p, при чему обе садрже тачке A и B.

Сл. 5 Сл. 6

Доказ. Према конструкцији, добијене кружнице додирују праву p у тачкама M, односно M_1. Како је $PM = PC$, а PC је тангентна дуж кружнице $k(S, SC)$ и последња кружница садржи тачке A и B, то је $PM^2 = PC^2 = PA \cdot PB$. Но, PM је тангента дуж кружнице која додирује праву p у тачки M, па, према обратном тврђењу **2**, тачке A и B припадају тој кружници. Слично важи за кружницу која додирује праву p у тачки M_1.

Дискусија. Задатак има решења ако се дате тачке A и B налазе са исте стране праве p, и то:

1° ако је права AB коса према правој p, постоје два решења – две неподударне кружнице;

2° ако је $AB \perp p$, задатак има два решења – две подударне кружнице;

3° ако је $AB \parallel p$, или је једна од тачака A и B на правој p, задатак има једно решење.

3. Конструисати правоугаоник ако је дата његова површина p^2 и разлика $d = a - b$ $(a > b)$ његових суседних страница.

Конструкција. Нека је дуж $MN = d = a - b$, а дуж $MA = p$ страница квадрата једнаког траженом правоугаонику. Конструише се кружница $k(O, r)$, при чему је $r = d/2$, те се на тангенти t ове кружнице у тачки M одреди тачка A тако да буде $MA = p$. Конструише се затим сечица AO кружнице k. Ако је $k \cap AO = \{B, E\}$, онда је дуж AB једна, а дуж $AE = AD$ друга страница траженог правоугаоника $ABCD$. Даља конструкција правоугаоника је очигледна.

Доказ. Из конструкције непосредно следи $AB - AD = AB - AE = d$, а из претходног је $AB \cdot AE = AB \cdot AD = AM^2 = p^2$.