Мр Миомир Анђић

РЈЕШАВАЊЕ ЕКСТРЕМАЛНИХ ЗАДАТАКА ЕЛЕМЕНТАРНИМ ПУТЕМ, II

Екстремуми функција једне промјенљиве

Примјер 11. Наћи минимум функције $f(x)=\log_{x^2-2x+2000}\dfrac{\sqrt{1999}}{1999}$.

Како је $x^2-2x+2000=(x-1)^2+1999\geqslant 1999$, то је функција $f(x)$ дефинисана за свако x. Преласком на основу $\frac{\sqrt{1999}}{1999}$ имамо

$$f(x)=\frac{1}{\log_{\frac{\sqrt{1999}}{1999}}(x^2-2x+2000)}=\frac{1}{\log_{\frac{\sqrt{1999}}{1999}} z},$$

гдје је $z=x^2-2x+2000=(x-1)^2+1999$. Функција $f(x)$ достиже минимум тачно онда кад функција $u=\log_{\frac{\sqrt{1999}}{1999}} z$ достиже масимум. Према iii), како је основа мања од 1, то ће се десити за оне вриједности x за које z достиже минимум. За $x=1$ тражени минимум функције $f(x)$ износи $y_{min}=\dfrac{1}{\log_{\frac{\sqrt{1999}}{1999}} 1999}=-\dfrac{1}{2}$.

Примједба 7. За свако x важи неједнакост $\log_{x^2-2x+2000}\dfrac{\sqrt{1999}}{1999}\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

Примјер 12. Наћи најмању позитивну вриједност израза $\dfrac{ax^2+b}{cx}$, гдје су a, b и c дати позитивни бројеви.

Трансформацијом израза $y=\dfrac{ax^2+b}{cx}$ имамо $y=\dfrac{ax}{c}+\dfrac{b}{cx}$. Како је производ $\dfrac{ax}{c}\cdot\dfrac{b}{cx}=\dfrac{ab}{c^2}$ сталан, то према Теореми 3 y достиже минимум за $\dfrac{ax}{c}=\dfrac{b}{cx}$, тј. $x=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ (негативна вриједност отпада због услова задатка).

Тражена најмања позитивна вриједност израза је $\dfrac{2b}{c\sqrt{b/a}}=\dfrac{2\sqrt{ab}}{c}$.

Саопштено на X конгресу математичара Југославије, Београд, јануара 2001. Први део овог чланка објављен је у *Настави математике*, **47**, 1–2 (2002), стр. 33–42.

Примједба 8. Једначина $y = \dfrac{ax^2+b}{cx}$ је еквивалентна једначини $-ax^2 + cyx - b = 0$ која има реална рјешења (по x) ако је њена дискриминанта ненегативна, тј. $D = (cy)^2 - 4ab \geqslant 0$. Послије рјешавања ове неједначине, узимајући у обзир да се тражи најмања позитивна вриједност, налазимо да је $y \geqslant \dfrac{2\sqrt{ab}}{c}$.

Примјер 13. Наћи најмању вриједност израза $\dfrac{(x+a)(x+b)}{x}$ ако је $a, b, x > 0$ (a и b су дати бројеви).

Као у претходном случају, имамо $\dfrac{(x+a)(x+b)}{x} = x + (a+b) + \dfrac{ab}{x}$. Дати израз има најмању вриједност тачно онда кад и израз $x + \dfrac{ab}{x}$. Минимум наступа за $x = \dfrac{ab}{x}$. Непосредно се провјерава да је за $x = \sqrt{ab}$ тражена вриједност $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

Примјер 14. Одредити минимум функције $y = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{2x^3}$ у интервалу $(0, +\infty)$.

Како је производ $\left(\dfrac{x^2}{3}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{1}{2x^3}\right)^2 = \dfrac{1}{108}$ сталан, имамо да је збир минималан за $\dfrac{x^2}{3} : 3 = \dfrac{1}{2x^3} : 2$, одакле је $x = \sqrt[5]{9/4}$, а $y_{min} = (\sqrt[5]{9/4})^3 : 3 + 1 : 2(\sqrt[5]{9/4})^2$.

Примједба 9. На потпуно исти начин можемо одредити минимум функција $y = \dfrac{a}{b}x^n + \dfrac{c}{dx^n}$ и $y = \dfrac{a}{b}\sqrt[m]{x^n} + \dfrac{c}{d\sqrt[p]{x^q}}$ у интервалу $(0, +\infty)$; $a, b, c, d > 0$; $m, n, p, q \in \mathbf{N}$.

Примјер 15. Наћи најмању вриједност израза

$$f(x) = \sqrt{x^2-2x+5} + \sqrt{x^2+4x+13}.$$

Пошто је

$$f(x) = \sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2} + \sqrt{(x-(-2))^2+(0-3)^2},$$

то је $f(x)$ збир дужина дужи AC и BC, гдје је $A(1,2)$, $B(-2,3)$ и C нека тачка x-осе. Познато је да је збир $d(A,C) + d(C,B)$ најмањи када тачка C припада правој BA', гдје је A' тачка симетрична тачки A у односу на x-осу (сл. 5). Дакле, најмања вриједност за $f(x)$ је

$$d(A', B) = \sqrt{(-2-1)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{34}.$$

Сл. 5

Примјер 16. Наћи највећу вриједност израза

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

на интервалу $(-1, +\infty)$.

Послије једноставне трансформације израз има облик

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+1}},$$

а он достиже највећу вриједност за оне вриједности x за које именилац $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+1}$ достиже најмању вриједност. Послије израчунавања као у претходном примјеру највећа вриједност за $f(x)$ је $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{-1}$.

Дакле, за $x\in(-1,+\infty)$ је $\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+x+1}\leqslant\dfrac{x+1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Примјер 17. Наћи највећу вриједност функције $f(x)=x^3-3x+2$ ако је $-2\leqslant x\leqslant 1$.

Послије трансформације израза x^3-3x+2 у облик $(x-1)^2(x+2)=(-x+1)^2(x+2)$ и узимајући у обзир да је $-x+1\geqslant 0$, $x+2\geqslant 0$ за $-2\leqslant x\leqslant 1$, као и $(-x+1)+(x+2)=3$, закључујемо да се највећа вриједност достиже, према теореми 2, када је $\dfrac{-x+1}{2}=x+2$, тј. за $x=-1$. Добијена вриједност припада датом интервалу, а за њу је највећа вриједност функције $f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$.

Примјер 18. Наћи максимум функције $y=4\cdot 9^{\sqrt{x^2}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2}$.

Функцију y запишимо на сљедећи начин: $y=4\cdot 3^{-|x|^2+2|x|}=4\cdot 3^z$, гдје је $z=-|x|^2+2|x|$. На основу iii), функција y достиже највећу вриједност за максималну вриједност z, а то ће се остварити ако је $|x|=-\dfrac{2}{2(-1)}=1$. Максимална вриједност износи $y_{max}=4\cdot 9^1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^1=12$.

Примјер 19. Одреди x за које израз $y=x^{2001}\sqrt{-x^{2000}+x^{1999}}$ достиже максимум.

Из очигледног записа $y=x^{\frac{6001}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$, узимајући у обзир да је $x+1-x=1$ сталан број, закључујемо да се максимум достиже за $x:\dfrac{6001}{2}=(1-x):\dfrac{1}{2}$, тј. за $x=\dfrac{6001}{6002}$ $(D_y=[0,1])$.

Примјер 20. За које вриједности $x\in(1,+\infty)$ функција $y=\dfrac{x^{1999}-1}{x^{2001}}$ достиже највећу вриједност?

Како је $y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^{2001}}=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{1}{x^{1999}}\right)=\left(\dfrac{1}{x^{1999}}\right)^{\frac{2}{1999}}\left(1-\dfrac{1}{x^{1999}}\right)$, према тврђењу теореме 2, јер је $\dfrac{1}{x^{1999}}+1-\dfrac{1}{x^{1999}}=1$, функција достиже максималну вриједност ако је $\dfrac{1}{x^{1999}}:\dfrac{2}{1999}=1-\dfrac{1}{x^{1999}}$, тј. $x=\sqrt[1999]{\dfrac{2001}{2}}$.

Примјер 21. Наћи максималну вриједност функције $f(x)=\cos^2 x+\sqrt{2}\sin x-3$.

Послије елементарне трансформације налазимо да је $f(x) = -\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 2 = -z^2 + \sqrt{2}\,z - 2$, гдје је $z = \sin x$. Очигледно је $y_{max} = -\dfrac{3}{2}$ за $z = \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тј. за $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Примјер 22. Наћи највећу вриједност функције

$$y = \frac{1}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2}.$$

Функција се лако трансформише у облик $y = (\sin^2 x + 2)(\cos^2 x + 1)$ и достиже максималну вриједност $y_{max} = 4$ када је $\sin^2 x + 2 = \cos^2 x + 1$, тј. за $\sin^2 x = 0$, односно $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Ово слиједни на основу теореме 1, јер је $\sin^2 x + 2 + \cos^2 x + 1 = 4 > 0$.

Примјер 23. Наћи највећу вриједност израза $6 - x^4 - x^8$.

Дати израз се лако трансформише у $(2 - x^4)(3 + x^4)$. На основу примједбе 2, израз достиже максималну вриједност истовремено када и апсолутна вриједност разлике чланова $2 - x^4$ и $3 + x^4$ достиже минимум. Поменута разлика $|(2 - x^4) - (3 + x^4)| = 2x^4 + 1$ достиже минимум за $x = 0$. За ову вриједност поменути израз добија максимум 6.

Покажимо сада на једном примјеру како се истовремено могу одредити како минимум тако и максимум функције.

Примјер 24. Одредити минимум и максимум функције $y = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$.

Како је трином $x^2 - 2x + 3 > 0$ за свако $x \in \mathbf{R}$, то је једначина $y = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$ еквивалентна једначини $yx^2 - (2y + 2)x + 3y + 3 = 0$. Област вриједности функције $y(x)$ састоји се од оних вриједности y за које је дискриминанта $D = -8y^2 - 4y + 4 \geqslant 0$. Рјешавањем ове неједначине добија се $-1 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{2}$. Тако је $y_{min} = -1$, $y_{max} = \dfrac{1}{2}$. Одговарајуће вриједности промјенљиве x налазимо рјешавањем једначина $-x^2 = 0$ и $x^2 - 6x + 9 = 0$. Дакле, $y = -1$ за $x = 0$; $y = \dfrac{1}{2}$ за $x = 3$.

Одређивање екстремних вриједности функција више промјенљивих

Примјер 25. Наћи највећу вриједност функције $z = xy$ при услову $3x + 4y = 8$, $x, y > 0$.

Израз z има највећу вриједност истовремено када и израз $3x \cdot 4y = 12xy$. Но како је $3x + 4y = 8$ сталан број, то ће се десити ако је $3x = 4y$ и $x, y > 0$, што заједно са $3x + 4y = 8$ даје $x = \dfrac{4}{3}$ и $y = 1$. Тада је $z_{max} = \dfrac{4}{3} \cdot 1 = \dfrac{4}{3}$.

Примједба 10. Слично се одређује максимум функције $z = x^p y^q$ ако је $ax^m + by^n = k$, $x, y > 0$. Функција z достиже највећу вриједност изстовремено када и израз $(ax^m)^{p/m}(by^n)^{q/n} = a^{p/m}b^{q/n}(x^p y^q)$, а то се дешава за

$ax^m : \dfrac{p}{m} = by^n : \dfrac{q}{n}$, одакле се и из $ax^m + by^n = k$ налазе x и y (водити рачуна о условима $ax^m > 0$, $by^n > 0$).

Примјер 26. Одреди максималну вриједност израза $z = 2x^3y^6$ ако је $3x^2 + xy^2 + \dfrac{1}{3}y^4 = 9$, $x, y > 0$.

Како је производ $3x^2 \cdot xy^2 \cdot \dfrac{1}{3}y^4 = x^3y^6 = \dfrac{1}{2}z$, то тражена максимална вриједност, због константног збира, наступа за $3x^2 = xy^2 = \dfrac{1}{3}y^4$, одакле се добија $y^2 = 3x$. Послије замене у $3x^2 + xy^2 + \dfrac{1}{3}y^4 = 9$ добија се $x = 1$ и $y = \pm\sqrt{3}$, па је $z_{max} = 5$.

Примјер 27. Одреди најмању вриједност функције $z = 3x^4 + 4y^5$ ако је $x^3y^4 = 1$, $x, y > 0$.

Ако је производ x^3y^4 константан, онда је то и $(3x^4)^{3/4}(4y^5)^{4/5}$, а одатле ће израз z бити максималан ако је $3x^4 : \dfrac{3}{4} = 4y^5 : \dfrac{4}{5}$, односно $4x^4 = 5y^5$, па се x и y могу наћи из једначина $4x^4 = 5y^5$ и $x^3y^4 = 1$, поштујући услове $x, y > 0$.

Покажимо сада како се у налажењу екстремних вриједности функција више промјенљивих елегантно користи неједнакост Коши-Буњаковског за векторе (2°).

Примјер 28. Ако је $x + 2y + 3z = p$, онда је $\sqrt{6p+9}$ највећа вриједност функције $u = \sqrt{2x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{6z+1}$. Доказати.

Посматрајмо сљедеће векторе $\vec{a} = (\sqrt{2x+1}, \sqrt{4y+1}, \sqrt{6z+1})$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$. Тада сагласно неједнакости Коши-Буњаковског, $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\,|\vec{b}|$, имамо

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{6z+1} &\leqslant \sqrt{(\sqrt{2x+1})^2 + (\sqrt{4y+1})^2 + (\sqrt{6z+1})^2} \cdot \sqrt{3} \\ &= \sqrt{2(x+2y+3z)+3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6p+9},\end{aligned}$$

при чему се једнакост достиже ако је $2x + 1 = 4y + 1 = 6z + 1$, односно (због $x + 2y + 3z = p$) за $x = \dfrac{p}{3}$, $y = \dfrac{p}{6}$, $z = \dfrac{p}{9}$. Дакле, највећа вриједност функције u при датом услову је заиста $\sqrt{6p+9}$. Наравно, треба имати у виду област дефинисаности функције u и израза $\sqrt{6p+9}$, тј. да важи $2x + 1 \geqslant 0$, $4y + 1 \geqslant 0$, $6z + 1 \geqslant 0$, $p = x + 2y + 3z \geqslant -\dfrac{3}{2}$, $6p + 9 \geqslant 0$.

Примјер 29. Наћи најмању вриједност функције $u = x^2 + y^2 + z^2$ уз услов $xy + yz + zx = 1$.

Уведимо одговарајуће векторе $\vec{a} = (x, y, z)$ и $\vec{b} = (y, z, x)$. Тада је $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = xy + yz + zx$. На основу неједнакости 2° имамо $xy + yz + zx \leqslant x^2 + y^2 + z^2$, те је $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2$, односно $u = x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$. Како се при том једнакост може постићи (нпр. за $x = y = z = 1/\sqrt{3}$), то је најмања вриједност функције u једнака 1.

Примјер 30. Наћи највећу вриједност функције $f(x) = \sqrt{4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^2 x + 3}$ и вриједности x за које се она реализује.

Помстрајмо векторе $\vec{a}=(\sqrt{4\cos^2 x+1},\sqrt{4\sin^2 x+3})$ и $\vec{b}=(1,1)$. На основу неједнакости 2° имамо

$$\sqrt{4\cos^2 x+1}+\sqrt{4\sin^2 x+3}\leqslant\sqrt{4\cos^2 x+1+4\sin^2 x+3}\cdot\sqrt{2}=4.$$

Ову вриједност функција достиже ако су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни, што значи ако је $\sqrt{4\cos^2 x+1}=\sqrt{4\sin^2 x+3}$, а ово је еквивалентно са $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$, тј. $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Дакле, највећа вриједност дате функције је $f_{max}=4$.

Примјена изложеног материјала при доказивању неједнакости

Изложени материјал нам омогућава да са лакоћом докажемо неке познате неједнакости и да откријемо већи број нових.

Примјер 31. Докажимо познату неједнакост која даје везу између аритметичке и геометријске средине ненегативних бројева. Треба доказати да за $x_1,x_2,\ldots,x_n\geqslant 0$ важи $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$.

Доказ.[1] Уствари треба доказати да важи $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\geqslant n$, односно да израз $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{P}$ достиже минималну вриједност која износи n, гдје је $P=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$. Заиста, користећи раставу $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{P}=\dfrac{x_1}{P}+\dfrac{x_2}{P}+\cdots+\dfrac{x_n}{P}$, а како је $\dfrac{x_1}{P}\cdot\dfrac{x_2}{P}\cdot\ldots\cdot\dfrac{x_n}{P}=\dfrac{P^n}{P^n}=1$, то на основу теореме 3 израз $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{P}$ достиже најмању вриједност ако је $\dfrac{x_1}{P}=\dfrac{x_2}{P}=\cdots=\dfrac{x_n}{P}$, односно $P=x_1=x_2=\cdots=x_n$, па је најмања вриједност израза n, јер је $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{P}=\dfrac{nx_1}{x_1}=n$.

Примјер 32. У правоуглом троуглу са катетама a и b и хипотенузом c важи неједнакост $a+b\leqslant c\sqrt{2}$.

Доказ. Примјеном неједнакости Коши-Буњаковског на векторе $\vec{u}=(1,1)$ и $\vec{v}=(a,b)$, налазимо $a+b\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}\,c$.

Примјер 33. Доказати да важи $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$, $a,b,c,d\geqslant 0$.

Доказ. Неједнакост се непосредно добија послије примјене неједнакости 2° на векторе $\vec{u}=(\sqrt{a},\sqrt{c})$, $\vec{v}=(\sqrt{b},\sqrt{d})$, јер је

$$\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{c}\sqrt{d}\leqslant\sqrt{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{c})^2}\sqrt{(\sqrt{b})^2+(\sqrt{d})^2}.$$

Примјер 34. Ако су x_1, x_2, …, x_n позитивни бројеви и ако је $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n=1$, тада вриједи $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n$, $n\in\mathbf{N}$.

Доказ. Ово слиједи непосредно из $nA_n\geqslant nG_n$.

[1] У примјеру 31 се показује како из теореме 3 слиједи $G_n\leqslant A_n$.

Примјер 35. Доказати да за свако x важи $\dfrac{ax^2}{b+cx^4} \leqslant \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$, $a, b, c > 0$.

Доказ. Довољно је доказати да израз $\dfrac{ax^2}{b+cx^4}$ достиже највећу вриједност и да она износи $\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$.

Како је $\dfrac{ax^2}{b+cx^4} = \left(\dfrac{b+cx^4}{ax^2}\right)^{-1}$, то поменути израз достиже највећу вриједност када израз $\dfrac{b+cx^4}{ax^2}$ достиже најмању вриједност. То ће се, према теореми 3, остварити када је $\dfrac{b}{ax^2} = \dfrac{c}{a}x^2$, тј. $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{b}{c}}$, јер је производ $\dfrac{b}{ax^2} \cdot \dfrac{c}{a}x^2 = \dfrac{bc}{a^2} > 0$ сталан. Дакле, највећа вриједност израза $\dfrac{ax^2}{b+cx^4}$ је за $x = \pm\sqrt[4]{\dfrac{b}{c}}$ и она износи $\dfrac{a\sqrt{b/c}}{2b} = \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$, одакле је $\dfrac{ax^2}{b+cx^4} \leqslant \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$, $a, b, c > 0$.

Задаци

1. Од свих троуглова који имају заједничку основицу и једнаке обиме, једнакокраки троугао има највећу површину.
2. Од свих троуглова који имају заједничку основицу и једнаке површине, једнакокраки троугао има најмањи обим.
3. У праву купу дате висине h и полупречника основе r треба уписати ваљак највеће запремине. Одредити полупречник основе x и висину y ваљка.
4. Између свих кутија шибица уобичајене конструкције дате запремине V, наћи облик (однос ивица) који обезбеђује најмању потрошњу материјала код производње.
5. Одреди број x тако да збир $\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i^2)^2$ има најмању вриједност. Ако је $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и ако је производ $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ константан, наћи најмању од тако добијених вриједности x.
6. Одреди највећу вриједност функције $f(x) = \log_2^2 x\left(\log_2^2 x + 3\log_2 \dfrac{8}{x^2}\right)$ у интервалу $(1, 8)$.
7. Одреди најмању вриједност израза $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ ако је $x + y = 20$, $x, y > 0$.
8. Наћи највећу вриједност функције $u = \sqrt{x+1} + 2\sqrt{2y+2} + 3\sqrt{3z+3}$ уз услов $x + 2y + 3z = 3$.
9. Ако је $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+a}$, доказати неједнакост $x + y \geqslant 2a$.
10. Доказати неједнакост $\log_{30}^2 2 + \log_{30}^2 3 + \log_{30}^2 5 > \dfrac{1}{3}$.
11. Ако су a_1, a_2, $\ldots$, a_n позитивни реални бројеви, тада вриједи $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

12. Ако су a, b и c странице једног троугла, доказати да је

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leqslant abc.$$

13. Доказати неједнакост

$$a\sqrt[n]{\operatorname{tg}\alpha} + b\sqrt[m]{\operatorname{ctg}\alpha} \geqslant \frac{b(n+m)}{m\sqrt[n+m]{\left(\frac{bn}{am}\right)^n}},$$

$a, b > 0$, $n, m \in \mathbf{N}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Митриновић, Д.С., *Неједнакости*, Грађевинска књига, Београд, 1965.
[2] Настава математике XXXVII, 2 (1991)
[3] Невяжеский, Г.Д., *Неравенства*, Москва, 1947.