Др Шефкет Арсланагић

ИНДУКЦИЈА ДА, АЛИ НЕ ПО СВАКУ ЦИЈЕНУ

Метода *математичке индукције* заснива се на сљедећој особини скупа $\mathbf{N}$ природних бројева која је позната као *принцип математичке индукције.* Ако подскуп M скупа $\mathbf{N}$ има ова два својства:

1) $k_0 \in M$;
2) $(\forall k \geqslant k_0)\, k \in M \implies k+1 \in M$,

тада M садржи све природне бројеве $n \geqslant k_0$.

У пракси се најчешће узима да је $k_0 = 1$, па се принцип математичке индукције формулише логичком формулом на сљедећи начин

$$(P(1) \wedge (\forall n \in \mathbf{N})\, P(n) \;\Rightarrow\; P(n+1)) \implies (\forall n \in \mathbf{N})\, P(n).$$

Помоћу методе математичке индукције се веома ефектно доказују разни сумациони обрасци, разне неједнакости, као и проблеми везани за дјељивост. Наравно, ово се све ради када су у питању проблеми везани за скуп природних бројева $\mathbf{N}$.

Међутим, они који се чешће баве доказима помоћу математичке индукције знају да понекада доказ неке тврдње помоћу ње не иде глатко, тј. да је веома тежак и не даје жељени разултат. Зато и наслов овог чланка. Наиме, овдје ћемо на неколико примјера показати како се, на примјер, неке неједнакости доказују много лакше и брже на неки други начин, док покушај доказа помоћу методе математичке индукције не даје жељени резултат онако како би се могло очекивати.

Примјер 1. Доказати помоћу методе математичке индукције да вриједи неједнакост

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Доказ. 1° За $n=1$ неједнакост (1) постаје $\frac{1}{9}<\frac{1}{4}$, што је тачно.

2° Претпоставимо да је неједнакост (1) тачна за неко $n=k \geqslant 1$, тј.

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{4}. \tag{2}$$

За $n = k+1$ лијева страна неједнакости (1) износи

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+3)^2} = \\ = \left[\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}\right]+\frac{1}{(2k+3)^2},$$

па је због претпоставке индукције (2),

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots+\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{(2k+3)^2} < \frac{1}{4}+\frac{1}{(2k+3)^2}.$$

Из овога се никако не може закључити да је лијева страна мања од $\frac{1}{4}$, јер је $\frac{1}{4}+\frac{1}{(2k+3)^2} > \frac{1}{4}$.

На овај начин смо дошли у неприлику и овако не можемо доказати неједнакост (1).

Међутим, сада ћемо неједнакост (1) веома брзо и елегантно доказати на други (једноставнији) начин. Примјетимо да је

$$\frac{2}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}, \tag{3}$$

јер се ова неједнакост послије сређивања своди на еквивалентну неједнакост $2k(2k+2) < (2k+1)^2$, тј. $0<1$, па је тачна за све $k \in \mathbf{N}$. Примјењујући неједнакост (3) на лијеву страну неједнакости (1), добијамо

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2} \\ < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)\right] \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{4n+4} < \frac{1}{4},$$

што је и требало доказати.

Примјер 2. Доказати да за $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $k \in \mathbf{N}$ вриједи неједнакост

$$(1+x)^k[x+(1-x)^{k+1}] \geqslant 1. \tag{4}$$

Доказ 1. Даћемо доказ помоћу математичке индукције по k.

1° Нека је $k=1$; тада (4) постаје

$$(1+x)[x+(1-x)^2] = (1+x)(1-x+x^2) = 1+x^3 \geqslant 1.$$

Дакле, неједнакост (4) је тачна за $k=1$.

2° Претпоставимо да је дата неједнакост тачна за неко $k = n \geqslant 1$, тј.

$$(1+x)^n[x+(1-x)^{n+1}] \geqslant 1.$$

Да бисмо доказали да је неједнакост тачна и за $k = n+1$, довољно је доказати да је
$$(1+x)^{n+1}[x+(1-x)^{n+2}] - (1+x)^n[x+(1-x)^{n+1}] \geqslant 0,$$
односно

(5) $$x(1+x)^{n+1} + (1+x)^{n+1}(1-x)^{n+2} - x(1+x)^n - (1+x)^n(1-x)^{n+1} \geqslant 0.$$

Лијева страна неједнакости (5) се може трансформисати на сљедећи облик
$$\begin{aligned} &x(1+x)^n(1+x-1) + (1+x)^n(1-x)^{n+1}(1-x^2-1) \\ &\qquad = x^2(1+x)^n - x^2(1+x)^n(1-x)^{n+1} = x^2(1+x)^n[1-(1-x)^{n+1}]. \end{aligned}$$

Сада очигледно слиједи да је $x^2(1+x)^n[1-(1-x)^{n+1}] \geqslant 0$, пошто је $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $1 \geqslant (1-x)^{n+1}$, тј.
$$1-(1-x)^{n+1} \geqslant 0.$$

Дакле, неједнакост (5) је тачна. То значи да је и дата неједнакост (4) тачна за све $k \in \mathbf{N}$. Овај доказ је нешто дужи и кључно мејесто у њему је доказ неједнакости (5). Према томе, он није једноставан него захтјева умјешност и добро познавање доказивања неједнакости.

Сада ћемо дати један кратак и елегантан доказ неједнакости (4). За овај доказ ћемо користити Јенсенову неједнакост за конвексне функције.

Доказ 2. Имамо

(6) $$(1+x)^k[x+(1-x)^{k+1}] = x(1+x)^k + (1-x)(1-x^2)^k.$$

Функција $t \mapsto t^k$ $(k \geqslant 1)$ је конвексна за $t \in [0,+\infty)$, па на основу Јенсенове неједнакости имамо
$$x(1+x)^k + (1-x)(1-x^2)^k \geqslant [x(1+x) + (1-x)(1-x^2)]^k,$$
односно

(7) $$x(1+x)^k + (1-x)(1-x^2)^k \geqslant (1+x^3)^k \geqslant 1,$$

јер је $0 \leqslant x \leqslant 1$. Сада из (6) и (7) слиједи $(1+x)^k[x+(1-x)^{k+1}] \geqslant 1$, што је и требало доказати.

Овај доказ је заиста елегантан, али изискује познавање Јенсенове неједнакости за конвексне функције.

Рецимо и то да доказ помоћу методе математичке индукције може бити прихватљив као спасоносно рјешење у случају када нисмо у стању неку сложену неједнакост доказати на неки други начин. Даћемо сада један такав примјер.

Примјер 3. Нека је n природан број такав да је $n \geqslant 2$. Доказати да вриједи неједнакост

(8) $$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

Доказ. Доказаћемо еквивалентну неједнакост неједнакости (8), тј.

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \tag{9}$$

Користићемо методу математичке индукције.

1° За $n=2$, неједнакост (9) постаје $\frac{8}{3} > \frac{9}{4}$, што је тачно.

2° Претпоставимо да за неко $n=k \geqslant 2$ вриједи

$$k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right) > (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right). \tag{10}$$

Доказаћемо да је (9) тачно тада и за $n=k+1$.

Имамо

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1} &= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1}\\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1}\\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+1}{2k+1}+\frac{1}{2k+1}\\ &> \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2},\end{aligned}$$

тј.

$$\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1} > \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}. \tag{11}$$

Сада имамо

$$\begin{aligned}&(k+1)\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right)\\ &\quad= k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1}\\ &\quad\overset{(11)}{>} k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}\\ &\quad\overset{(10)}{>} (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}\\ &\quad= (k+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}\\ &\quad= (k+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}\right),\end{aligned}$$

тј.

$$(k+1)\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right) > (k+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+2}\right),$$

што значи да је неједнакост (9), односно (8) тачна и за $n=k+1$ ако је тачна за $n=k \geqslant 2$. Дакле, неједнакост (8) је тачна за све $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

Као што се може видјети, овај доказ је ефектан, али прилично тежак јер смо морали најприје доказати помоћну неједнакост (11). Остаје отворено питање како доказати дату неједнакост (8) без употребе методе математичке индукције.

Читаоцима препоручујемо да докажу сљедеће неједнакости кориштењем методе математичке индукције или пак на неки други начин.

1) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

2) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

3) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

4) $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} \leqslant n$, $n \in \mathbf{N}$.

5) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} > n$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

6) а) $2^n > n^2$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 5$;
   б) $2^n > n^3$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 10$.

7) $n! \geqslant n^{n/2}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

8) $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot (2n-1)! < \frac{(n!)^{4n}}{(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!)^4}$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.

9) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{3n+1} > 1$, $n \in \mathbf{N}$.

10) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}$, $n \in \mathbf{N}$.