Др Миодраг Матељевић

О КОМПЛЕКСНИМ БРОЈЕВИМА И ОСНОВНОМ СТАВУ АЛГЕБРЕ

Ово је први у низу чланака о комплексним бројевима. Настао је на основу серије предавања, одржаних у оквиру Тематске математичке школе у Тршићу 1994. године, у организацији одељења Министарства просвете и спорта у Лозници. Школу је организовао Пера Цветиновић, надзорник за математику. Аутор је ову занимљиву тему обрадио подстакнут од стране академика Милосава Марјановића, на чему му дугује искрену захвалност.

Кратко речено, увођење имагинарне јединице i, докази основних својстава комплексних бројева и елементарни доказ Основног става алгебре су предмет овог текста.

1. Увод

У скупу $\mathbf{R}$ реалних бројева нема решења тако једноставна једначина као што је

$$z^2 + 1 = 0.$$

Формално, у намери да се реши ова једначина, може се увести имагинарна јединица i за коју је

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

У литератури се имагинарна јединица дефинише и као $\sqrt{-1}$, мада је корен у реалној анализи дефинисан само за ненегативне бројеве.

Бројеви облика $a+ib$, где су a и b реални бројеви, називају се комплексним бројевима. Појам комплексног броја $a+ib$ постаје јаснији ако се идентификује са уређеним паром (a,b); тј. ако скуп $\mathbf{C}$ комплексних бројева идентификујемо са векторским простором $\mathbf{R}^2$.

Облик $a+ib$, који се зове алгебарски облик комплексног броја, користи се у средњој школи. Уређене парове (a,b) користимо само да јасно и прецизно уведемо дефиниције и докажемо неколико резултата (прецизније, до доказа теореме 1).

Покушајмо да дефинишемо множење комплексних бројева тако да је дистрибутивно у односу на сабирање и да важи (1). Ако су x и y реални бројеви и $z = x+iy$, дефинишемо

$$iz = i(x+iy) = ix + i(iy) = ix + i^2y = -y + ix = (-y, x).$$

Дакле,

$$i(x, y) = (-y, x), \tag{2}$$

тј.

$$i(x + iy) = -y + ix. \tag{3}$$

Поновимо да се у векторском простору $\mathbf{R}^2$ дефинише множење реалног скалара λ и вектора $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ као

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y). \tag{4}$$

Користећи (2) може се дефинисати множење комплексног скалара $a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$, и вектора $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}(a + ib)z &= az + i(bz) = a(x, y) + ib(x, y) = (ax, ay) + i(bx, by)\\ &= (ax, ay) + (-by, bx) = (ax - by, ay + bx).\end{aligned} \tag{5}$$

Дакле,

$$(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx). \tag{6}$$

2. Строго увођење комплексних бројева

Релација (6) даје мотивацију да се множење комплексних бројева дефинише на следећи начин:

$$(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(ay + bx), \qquad a, b, x, y \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Погодно је да за комплексне бројеве користимо ознаке

$$z = (x, y), \quad z_1 = (x_1, y_1), \quad \ldots, \quad w = (u, v), \quad \zeta = (\xi, \eta),$$

где су $x, y, x_1, y_1, \ldots, u, v, \xi, \eta$ реални бројеви.

Дефиниција 1. *Скуп комплексних бројева*, у ознаци $\mathbf{C}$, јесте скуп свих уређених парова $z = (x, y)$ реалних бројева, за које су једнакост, сабирање и множење дефинисани на следећи начин:

два комплексна броја (x, y) и (u, v) су једнака акко $x = u$ и $y = v$;

збир комплексних бројева $z = (x, y)$ и $w = (u, v)$ је

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v);$$

производ комплексних бројева z и w је

$$(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu).$$

На основу дефиниције може се непосредно доказати да су сабирање и множење комплексних бројева комутативне и асоцијативне операције и да је множење дистрибутивно у односу на сабирање. После увођења горњих дефиниција може се прво прецизно разумети смисао једначине $z^2 + 1 = 0$ у $\mathbf{C}$, а затим показати да ова једначина има два решења $(0, 1)$ и $(0, -1)$.

3. Алгебарска својства

Ако се реални број x идентификује са $(x, 0)$ и дефинише $i = (0, 1)$, може се показати да је $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$ (в. теорему 1 која следи). Пар $(0, 0)$ је неутрални елемент при сабирању, јер је

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

Пар $(1, 0)$ је неутрални елемент при множењу, јер је

$$(x, y)(1, 0) = (x, y).$$

Пропозиција 1. *Сваки комплексни број $z = (x, y) \neq (0, 0)$ има инверзни елемент $w = (u, v)$ при множењу дат са*

$$w = z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right). \tag{8}$$

Доказ. Релација $zw = (1, 0)$ еквивалентна је систему једначина

$$xu - yv = 1, \quad xv + yu = 0,$$

чије решење је (8). ■

Одузимање комплексних бројева је операција инверзна сабирању. Користећи постојање инверзног елемента за множење доказујемо следећи став.

Пропозиција 2. *Ако је $zw = 0$, тада је бар један од фактора z или w једнак нули.*

Доказ. Претпоставимо да је $zw = 0$ и $z \neq 0$. Инверзни елемент z^{-1} постоји и како је, на основу дефиниције множења, производ произвољног комплексног броја и нуле нула, следи

$$w = 1w = (z^{-1}z)w = z^{-1}(zw) = z^{-1}0 = 0. \quad ■$$

Дељење ненултим комплексним бројем дефинише се помоћу

$$\frac{w}{z} = wz^{-1}, \qquad z \neq 0.$$

Комплексни број дефинисан претходном релацијом назива се количник комплексних бројева w и z. Ако је $z \neq 0$ и $\zeta = \dfrac{w}{z}$, тада је $\zeta z = w$ и ова једначина има решење по ζ.

Бијективна кореспонденција $x \mapsto (x, 0)$, $x \in \mathbf{R}$, је изоморфизам поља $\mathbf{R}$ на поље комплексних бројева облика $(x, 0)$, стога комплексни број $(x, 0)$ идентификујемо са реалним бројем x и пишемо $(x, 0) = x$. Специјално, $(0, 0) = 0$ и $(1, 0) = 1$.

Као и у $\mathbf{R}$, уводимо степеновање $z^2 = zz$, $z^3 = z^2 z$ итд.

Пропозиција 3. *Једначина $z^2 + 1 = 0$ има два решења у скупу $\mathbf{C}$.*

Доказ. Једначина $z^2+1=0$ може се написати у облику
$$(x,y)(x,y)+(1,0)=(0,0).$$
Користећи дефиниције множења и одузимања добијамо $(x^2-y^2,2xy)=(-1,0)$, тј. систем једначина
$$x^2-y^2=-1, \quad 2xy=0,$$
који има решења $x=0$, $y=1$ и $x=0$, $y=-1$, тј. $(0,1)$ и $(0,-1)$. ∎

Ова решења играју важну улогу у операцијама са комплексним бројевима и за њих се користе посебне ознаке $\pm i$.

Дефиниција 2. Комплексни број $(0,1)$ зовемо *имагинарна јединица* и означавамо са i.

Доказали смо да је $i^2=-1$ и да су $\pm i$ решења једначине $z^2+1=0$ у $\mathbf{C}$. У суштини, за свако $z\in\mathbf{C}$, $z^2+1=(z+i)(z-i)$. Општије, ако су z и w комплексни бројеви, добијамо
$$z^2+w^2=(z+iw)(z-iw).$$

Теорема 1. *Сваки комплексни број $z=(x,y)$ може се представити на јединствен начин у облику $x+iy$ који се зове алгебарски облик комплексног броја z.*

Доказ. Како је
$$iy=(0,1)(y,0)=(0\cdot y-1\cdot 0, 0\cdot 0+1\cdot y)=(0,y),$$
добијамо $(x,y)=(x,0)+(0,y)=x+iy$. ∎

Нека је комплексни број $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbf{R})$ дат у алгебарском облику. Реални број x назива се *реални део* комплексног броја z и означава са $\operatorname{Re} z$. Реални број y назива се *имагинарни део* комплексног броја z и означава са $\operatorname{Im} z$. Ако је $\operatorname{Re} z=0$, каже се да је број z чисто имагинаран. Без тешкоћа доказују се једнакости
$$\operatorname{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re} z_k, \qquad \operatorname{Im}\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Im} z_k.$$

4. Конјуговано комплексан број

Број $\overline{z}=x-iy$ зове се *конјуговано комплексан број* комплексног броја $z=x+iy$. Из једнакости $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$ добија се
$$x=\frac{1}{2}(z+\overline{z}), \qquad y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z});$$
$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}z+\overline{z}, \qquad \operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\overline{z}).$$
Непосредно се доказују једнакости
$$\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}, \quad \overline{zw}=\overline{zw}, \quad \overline{\Big(\frac{z}{w}\Big)}=\frac{\overline{z}}{\overline{w}},\ (w\neq 0).$$
Индукцијом се доказује
$$\overline{\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big)}=\sum_{k=1}^{n}\overline{z}_k, \qquad \overline{\Big(\prod_{k=1}^{n} z_k\Big)}=\prod_{k=1}^{n}\overline{z}_k.$$

5. Модул комплексног броја

Модул комплексног броја $z = x + iy$ је реалан ненегативан број $\sqrt{x^2+y^2}$ и означава се са $|z|$.

Производ комплексног броја z и њему конјугованог комплексног броја $\overline{z}$ је $z\,\overline{z} = x^2 + y^2$, а то значи да је

$$|z|^2 = z\,\overline{z}, \tag{9}$$

и, специјално, ако је $z \neq 0$, тада је

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{9'}$$

Из дефиниције модула следи:

$$|z| = 0 \quad \text{акко} \quad z = 0, \tag{10}$$

$$|z| = |\overline{z}|, \tag{11}$$

$$-|z| \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant |z|, \quad -|z| \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant |z|. \tag{12}$$

Користећи (9) доказујемо:

$$|zw| = |z|\,|w|, \tag{13}$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad w \neq 0. \tag{14}$$

Доказ (13). На основу (9),

$$|zw|^2 = (zw)\overline{(zw)} = (z\overline{z})(w\overline{w}) = |z|^2|w|^2 \tag{15}$$

и отуда, како је модул ненегативан, следи (13). Слично се доказује (14).

Користећи исту општу технику доказује се

Пропозиција 4.

$$|z+w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2, \tag{16}$$

$$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2, \tag{17}$$

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2). \tag{18}$$

Доказ. Како је $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w})$, множењем на десној страни добија се

$$|z+w|^2 = z\overline{z} + (z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}) + w\overline{w}.$$

Отуда, с обзиром да је $z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$, следи (16). На сличан начин се доказује (17). (Такође, како је $\operatorname{Re}(z\overline{(-w)}) = -\operatorname{Re}(z\overline{w})$, из (16) следи (17).) Сабирањем (16) и (17) добија се (18). ∎

Поновимо да смо комплексне бројеве идентификовали са уређеним паровима у равни $\mathbf{R}^2$. Комплексне бројеве сабирамо као векторе. Ако су z и w у $\mathbf{C}$, тачке 0, z, w и $z+w$ су темена паралелограма.

У $\mathbf{C}$ уводимо еуклидско растојање између z и w помоћу

$$e(z,w) = |z-w|. \tag{19}$$

Сада, (18) је правило паралелограма: сума квадрата дужина ивица паралелограма једнака је суми квадрата дужина дијагонала; (16) и (17) су косинусна теорема.

Основно својство овог растојања је да задовољава неједнакост троугла

$$|z_1 - z_2| \leqslant |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|. \tag{20}$$

Ако заменимо $z = z_1 - z_3$ и $w = z_3 - z_2$ у претходној неједнакости, јасно је да треба само да се докаже

$$|z+w| \leqslant |z| + |w|. \tag{21}$$

Али, како је $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leqslant |z|\,|w|$, на основу (16) следи

$$|z+w|^2 \leqslant |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2,$$

тј. $|z+w|^2 = (|z|+|w|)^2$. Како је модул ненегативан број, из ове неједнакости следи (21).

Користећи (21) непосредно се доказује

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z-w|. \tag{22}$$

Доказ. Из (21) следи $|z| = |(z-w)+w| \leqslant |z-w| + |w|$, тј.

$$|z| - |w| \leqslant |z-w|. \tag{23}$$

Ово је неједнакост (22) ако је $|z| \geqslant |w|$. Ако је $|z| \leqslant |w|$ и ако z и w промене улоге у неједнакости (23), добија се

$$-(|z| - |w|) \leqslant |z-w|. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следи (22). ■

6. Поларна форма

Поновимо, број i је дефинисан тако да је решење једначине $z^2+1=0$, тј. $i^2=-1$. Примењујући основна правила аритметике на комплексне бројеве и релацију $i^2=-1$ дефинише се множење комплексних бројева. У овом одељку, помоћу геометријске репрезентације комплексног броја изводи се поларна форма и отуда једноставно правило за множење комплексних бројева.

Детаљније разматрање тригонометријског облика и са друге тачке гледишта даје се у [Ma1] и [Ma2].

У намери да се изведе геометријска интерпретација производа уводе се *поларне координате.*

Поларне координате (r, φ) комплексног броја $z = (x, y)$ уводе се помоћу

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \tag{25}$$

где је $r = |z|$. Поларни угао φ назива се *аргумент* или *амплитуда* комплексног броја z и означава се са $\operatorname{Arg} z$ (за прецизнију дефиницију видети [Ma1], [Ma2]).

На основу (25), свако $z \in \mathbf{C}$ може се представити у облику

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{26}$$

где је $r = |z|$ и $\varphi \in \mathbf{R}$.

Погодно је увести и ознаку $\operatorname{cis} = \cos + i\sin$. Дакле, свако $z \in \mathbf{C}$ може се представити у облику

$$z = r\operatorname{cis}\varphi, \tag{26'}$$

где је $r = |z|$ и $\varphi \in \mathbf{R}$.

Помоћу следеће формуле изводи се правило за множење комплексних бројева:

$$\operatorname{cis}(\alpha + \beta) = \operatorname{cis}\alpha \operatorname{cis}\beta. \tag{27}$$

Доказ. С обзиром на дефиницију множења,

$$\operatorname{cis}\alpha\operatorname{cis}\beta = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta).$$

Отуда, на основу адиционе формуле за тригонометријске функције косинус и синус, следи (27). ∎

Формула (27) такође се назива адиционом (cis-*адициона*) формулом за тригонометријске функције.

Размотримо сада бројеве $z_1 = r_1\operatorname{cis}\varphi_1$ и $z_2 = r_2\operatorname{cis}\varphi_2$. Помоћу (27) се добија

$$z_1z_2 = r_1r_2\operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2). \tag{28}$$

Производ има модул r_1r_2 и аргумент $\varphi_1 + \varphi_2$ и отуда следи:

Ако $z, w \in \mathbf{C}$, тада

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w. \tag{29}$$

Ово је основно правило које даје дубоко и неочекивано оправдање геометријске репрезентација комплексног броја.

Подвуцимо, начин на који је изведена формула (28) нарушава принцип: у анализи су валидни докази који се изводе из својстава реалних бројева (видети нпр. [Ah]); прво, (29) је релација између углова више него између бројева; друго, доказ је базиран на тригонометрији. Остаје да се аргумент дефинише аналитички и да се (29) докаже аналитички. Ово ће бити предмет следећих чланака [Ma1] и [Ma2].

7. Биномна једначина

На основу претходних резултата добија се да је степен броја $z = r\operatorname{cis}\varphi$ дат са

$$z^n = r^n \operatorname{cis} n\varphi. \tag{30}$$

За $r = 1$ добија се *Моаврова формула* (A. de Moivre)

$$(\operatorname{cis}\varphi)^n = \operatorname{cis} n\varphi, \tag{31}$$

која даје екстремно једноставан начин да се изразе $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ помоћу $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Дефиниција 3. *n-ти корен* комплексног броја a је скуп решења једначине

$$z^n = a. \tag{32}$$

Претпоставимо да је $a = r\operatorname{cis}\alpha$ и $z = \rho\operatorname{cis}\varphi$. Тада једначину (32) пишемо у облику

$$z^n = \rho^n \operatorname{cis} n\varphi = r\operatorname{cis}\alpha. \tag{33}$$

Ако је $\rho^n = r$ и $n\varphi = \alpha$, тада јасно важи (33). У суштини, (33) важи ако се $n\varphi$ разликује од α за мултипл пуног угла. Ако се углови изражавају у радијанима, пун угао је 2π, и (33) важи акко

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n},$$

где је k цео број. Ипак, само вредности $k = 0, 1, \dots, n-1$ дају различите вредности z. Отуда

$$z = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\left(\frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Сваки комплексан број различит од нуле има n n-тих корена. Геометријски, n-ти корени су темена правилног n-тоугла.

Уведимо још ознаку $e^{i\varphi} = \operatorname{cis}\varphi$.

Дакле, ако је $a = r\operatorname{cis}\alpha = re^{i\alpha} \neq 0$ дат у поларној форми и n природан број, $\sqrt[n]{a}$ је скуп решења једначине $z^n = a$ по z, тј. скуп

$$\{\, z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi_k} : k = 0, 1, \dots, n-1 \,\}, \quad \text{где је} \quad \varphi_k = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n},$$

мада се у литератури са $\sqrt[n]{a}$ понекад означава и неки од n-тих корена из a.

Случај $a = 1$ је посебно интересантан. Корени једначине $z^n = 1$ називају се *n-ти корени јединице* и ако се уведе ознака

$$\omega = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n},$$

са $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ су дати сви n-ти корени јединице. Такође је јасно да ако је z_0 неки n-ти корен из a, тј. $z_0 \in \sqrt[n]{a}$, тада је $\sqrt[n]{a} = \{\, \omega^k z_0 : k = 0, 1, \dots, n-1 \,\}$.

8. Основни став алгебре

Полином z^2+1 има две нуле, $\pm i$. Отуда следи да полином $P(z)=z^4+4$ има четири нуле. Заиста, како је $P(z)=(z^2+2z+2)(z^2-2z+2)$ и отуда $P=P_1P_2$, где је $P_1=(z+1)^2+1$ и $P_2=(z-1)^2+1$, нуле полинома P су $\pm 1\pm i$.

Није једноставно произвољан полином раставити да се провери да ли има нула. Помоћу тригонометријског облика комплексног броја доказује се да ако је n природан број, тада:

(а) полином $P(z)=z^n+a$ има n нула ако је a комплексан број различит од нуле;

(б) степена функција $z\mapsto z^n$ пресликава круг полупречника r на круг полупречника r^n.

Интересантно је да се помоћу (б) може доказати основни став алгебре: сваки неконстантан полином има бар једну нулу (и отуда полином степена $n\geqslant 1$ има n нула) и да једноставан пример у тачки (а) илуструје разлику између Реалне анализе и Комплексне анализе; наиме, ако је, на пример, n паран природан број и $a>0$, P пресликава интервал $[-r,r]$ на $[a,a+R]$, а круг U_r са средиштем у координатном почетку на круг $B=B(a;R)$, где је $R=r^n>0$. Дакле, ако се P разматра као реална функција, P има минимум $a>0$ у тачки 0 и, специјално, P нема реалних нула.

Дакле, Основни став алгебре (Комплексна анализа) комплетира теорију о реалним нулама полинома. У чланцима који следе појавиће се други важни примери у којима Комплексна анализа комплетира теорију Реалне анализе.

Доказ Основног става алгебре који следи није преузет из литературе и настао је у току вишегодишњег предавања курса Комплексне анализе[1].

Теорема 2. (Основни став алгебре) *Ако је n позитиван цео број и*

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0,$$

где су $a_0,\dots,a_{n-1}$ комплексни бројеви, тада P има тачно n нула у комплексној равни.

Доказ. Рутински се доказује да $|P|$ достиже минимум у некој тачки a; нека је $b=P(a)$. Докажимо да је $b=0$.

Претпоставимо, супротно, да је $b\neq 0$. Помоћу пресликавања $b^{-1}P\circ T_a$, где је T_a транслација дефинисана са $T_a(z)=z+a$, једноставно се показује да се доказ своди на случај $a=0$ и $P(z)=1+Az^m+R(z)$, где је $A=|A|e^{i\alpha}\neq 0$, $m\geqslant 1$, $R(z)=z^mQ$ и Q такав полином да је $Q(0)=0$.

Како је $Q(0)=0$, постоји δ довољно мало тако да је

$$|Q(z)|\leqslant\frac{|A|}{2}\quad\text{за}\quad |z|\leqslant\delta. \tag{34}$$

[1] У двосеместралном курсу Основни став алгебре обично се доказује помоћу Принципа аргумента. Већина студената једносеместралног курса није могла да скицира идеју која води ка неком доказу. Природно је постављено питање: да ли постоји елементарни доказ? Сматрамо да је доказ који се пердлаже елементаран и да је, бар са педагошке тачке гледишта, интересантан.

Нека је $z = re^{i\varphi}$ и $p(z) = Az^m$. Тада је, на основу (30),

$$p(z) = Az^m = |A|e^{i\alpha}r^m e^{im\varphi} = |A|r^m e^{i(\alpha+m\varphi)}.$$

Нека је, на пример, $\alpha+m\varphi = \pi$, тј. $\varphi = \varphi_0 = \dfrac{\pi-\alpha}{m}$; тада p пресликава полуправу $\Lambda_{\varphi_0} = \{\,\rho \operatorname{cis}\varphi_0 : \rho > 0\,\}$ на $\mathbf{R}_- = \Lambda_\pi = \{\,x : x < 0\,\}$ и отуда прво следи

$$|P(z)| \leqslant \bigl|1 - |A|r^m\bigr| + r^m|Q(z)| \quad \text{за} \quad z \in \Lambda_{\varphi_0}; \tag{35}$$

а затим из (34) и (35), ако се још додатно претпостави да је $\delta^m \leqslant \dfrac{1}{|A|}$, добија се

$$|P(z)| \leqslant 1 - |A|r^m + r^m\frac{|A|}{2} = 1 - r^m\frac{|A|}{2} \quad \text{за} \quad |z| \leqslant \delta;$$

и отуда $|P(z)| < 1$ за $z \in (0, \delta e^{i\varphi_0}]$, што је контрадикција са претпоставком.

Дакле, $P(z_1) = 0$ за неко z_1 и стога, на основу елементарне алгебре, постоји полином P_1 степена $n-1$ тако да $P(z) = (z-z_1)P_1(z)$. Индукцијом по n доказује се теорема. ■

Подвуцимо да се у суштини на основу формуле (30) $z^m = (r \operatorname{cis}\varphi)^m = r^m \operatorname{cis} m\varphi$ доказује да p пресликава полуправу $\Lambda_{\varphi_0} = \{\,\rho \sin\varphi_0 : \rho > 0\,\}$ на $\mathbf{R}_- = \Lambda_\pi = \{\,x : x < 0\,\}$, што још једанпут показује важност геометријске интерпретације комплексног броја и својстава која отуда проистичу; на пример, основних формула (27), (29) и (30). У V2 предлаже се модификација претходног доказа.

Развијајући даље идеју доказа ове теореме, може се доказати Принцип max-min за холоморфне функције (в. V3) и друге класе функција и потпуно описати њихово локално понашање (о трајекторијама које се односе на холоморфне функције видети [St]).

Даља својства полинома и корена и везе са другим областима, укључујући елементарну геометрију, могу бити предмет посебног чланка (видети нпр. [Ah], [Ми], [Je-Ma]). Овде наводимо само неке резултате V1–7.

V1. Нека је полином p дефинисан са $p(z) = Az^m$, где је $A = |A|e^{i\alpha} \neq 0$ комплексан број и m природан број. Доказати да се скуп $p^{-1}(\mathbf{R}_-)$ састоји од m полуправих са почетком у координатном почетку.

V2. Доказати:

(а) полином p, дефинисан у V1, пресликава круг са средиштем у координатном почетку на круг са средиштем у координатном почетку;

(б) подразумевајући да важе ознаке из доказа теореме 1, доказати да постоји z_0 тако да је $w_0 = p(z_0) < 0$ и $|R(z_0)| < |w_0| < 1$;

(в) помоћу (б) извести алтернативни доказ теореме 1.

Доказ. Како R/p тежи нули када z тежи нули, постоји шупља околина $B' = \{\,z : 0 < |z| < r\,\}$, $r > 0$, тачке 0, тако да је $|R| < |p|$ на B'. Отуда, с обзиром да p пресликава B' на шупљу околину тачке 0, следи (б). На основу (б) и неједнакости троугла, следи прво $|P(z_0)| \leqslant |1 - |w_0|| + |R(z_0)| = 1 - |w_0| + |R(z_0)|$, и онда $|P(z_0)| < 1$, што је контрадикција са претпоставкама. ■

V3. На сличан начин као у доказу теореме доказати Лему max-min (и отуда Принцип max-min) за холоморфне функције.

V4. Доказати Lucas-ову теорему: ако све нуле полинома P припадају полуравни, тада све нуле извода P' припадају истој полуравни.

V5. Доказати да најмањи конвексан полигон који садржи нуле полинома P, садржи и нуле извода P'.

Да ли се овај резултат може доказати помоћу Принципа аргумента и уопштити помоћу Теореме о индексу ротације?

V6. (a) Нека је $s_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} z^k$. Доказати

$$(1-z)s_n(z) = (1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^n) = 1-z^{n+1}.$$

(б) Доказати да је $1-e^{i\varphi} = -2ie^{i\frac{\varphi}{2}}\sin\dfrac{\varphi}{2}$. Доказати да из (а) и (б) следи

(в) $s_n(e^{i\theta}) = \dfrac{1-(e^{i\theta})^{n+1}}{1-e^{i\theta}} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$ и отуда

(г) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$, $0<\theta<2\pi$.

V7. Нека је $z = re^{i\varphi_0} \neq 0$ дат у поларној форми и n природан број. Поновимо да је $\sqrt[n]{z}$ скуп решења једначине $w^n = z$ по w, тј. скуп

$$\{\, z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi_k} : k = 0,1,\ldots,n-1\,\}, \quad \text{где је} \quad \varphi_k = \frac{\varphi_0}{n} + k\frac{2\pi}{n}.$$

Доказати да је $\sum\limits_{0}^{n-1} z_k = 0$.

Први доказ. Нека је $s = \sum\limits_{0}^{n-1} z_k$; тада је $e^{i\varphi_0}s = \sum\limits_{0}^{n-1} e^{i\varphi_0}z_k = s$ и отуда $s=0$.

Други доказ. Нека је $q_0 = z_0$, $\phi = \dfrac{2\pi}{n}$ и $q = e^{i\phi}$; тада је $z_k = z_0q^k$ и отуда $s = \sum\limits_{0}^{n-1} z_0 q^k = q_0\dfrac{1-q^n}{1-q}$. Како је $q^n = e^{2\pi i} = 1$, следи $s = 0$. ■

Предлажемо за вежбу, на пример, 1.21, 1.28, 1.30, 1.31, 1.36, 1.37, 1.40, 1.41, 1.43, 1.47, 1.50, 1.51, 1.52 [Je-Ma].

ЛИТЕРАТУРА

[Ah] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1966.

[Ch-Br] R. Churchill, J. Brown, *Complex Variables and Applications*, McGraw-Hill Book Co., 1984.

[Je-Ma] М. Јевтић, М. Матељевић, *Аналитичке функције*, Београд 1986.

[Ma1] М. Матељевић, *Комплексни бројеви и елементарна геометрија.*

[Ma2] М. Матељевић, *Експоненцијална функција.*

[Ми] Д. Митриновић, *Комплексна анализа*, Београд 1973.

[St] K. Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, 1984.