НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2003, XLVIII, 1–2, стр. 10–16

Др Милосав Марјановић

НЕКА РАЗМАТРАЊА О НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Пре него што крену у школу деца већ развију неке фундаменталне представе о свету који их окружује и овладају једним битним делом језичког фонда. Са те основе и креће школска настава као дугогодишњи процес у току кога се постојећи појмови поoштравају и проширују, или се формирају читави системи нових појмова.

За наставу математике је типично да ће појмови већином бити нови (тј. они су научни а не општи), као и да се на почетном нивоу те наставе они формирају као опажајни а не као већ створене апстракције. Узраст који обухвата ниже разреде основне школе означава се као период конкретних операција (Ж. Пијаже), али се, нажалост, често то схвата сужено – као операсање конкретним материјалима, а не шире – да се у том периоду значење појмова мора ослањати на чулне представе.

Фундаменталне појмове никад не сводимо на неке друге, тј. не покушавамо да их одређујемо дефиницијама, јер они својим постојањем најбоље исказују своје значење. Тако би било без смисла покушавати да се дефинише шта је то појам. Уместо тога, следећи идеје давно развијене у класичној логици, ми ћемо овде описати једну схему по којој се појмови схватају као целине, а која ће се показати као корисна за начелно тумачење садржаја и процедура присутних у почетној настави математике.

1. Схема појма – видови представљања

Прво да видимо како дете неке њему блиске појмове формира већ у раном периоду детињства. У његовој околини налазе се неки предмети слични по облику и са одређеном наменом. Дете их гледа, стиче и друге сензорне утиске о њима, а у његовој свести се формира представа о тим предметима. Кад је та представа формирана, дете препознаје и друге сличне предмете и онда кад их први пут види.

Тако ће појам „столица" чинити неки предмети из дететовог окружења, тј. то ће бити неке стварне столице за које кажемо да су *примери* везани за тај појам. Унутрашњу представу формирану уз те примере називамо *ментална слика*, а за изговорену или написану реч „столица" кажемо да је *назив* за тај појам.

Мишљења смо да овај текст, који представља уводни део књиге: М. Марјановић, *Приручник за уџбеник математике за 1. разред основне школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2002, стр. 5–13, заслужује да се учини доступним ширем кругу читалаца. Његовим објављивањем у „Настави математике" чинимо корак у том правцу. (*В. Мићић*)

И за многе друге појмове, као што су, на пример, „сто“, „мачка“, „лопта“, итд, имаћемо одговарајуће примере, менталну слику и назив.

Истичући три поменуте компоненте, цртаћемо следећу схему:

ментална слика	назив

примери

по којој треба схватати појмове на целовит начин.

На исти начин гледамо и на математичке појмове који се јављају у раној настави, са том разликом што њих још и симболички означавамо. Тако су, рецимо, за појам броја „три“ примери све трочлане групе предмета, менталну слику добро представљају три тачке или три кружића, назив је реч „три“, а одговарајући симбол је цифра „3“. Све кружне контуре које видимо су примери за појам круга, менталну слику добро представља линија извучена шестаром, док је назив реч „круг“ итд.

Погрешно би било мислити да је ментална слика верна представа неког реалног предмета или бића. Она је, у ствари, знатно поједностављенија и то често деца најбоље пројектују својим једноставним цртежима. Али наше унутрашње представе у случају основних математичких појмова јесу добро приказиве сликом, нарочито кад су ти појмови геометријски. То истиче фундаменталну улогу ових представа у интерпретирању и разумевању визуелних опажаја.

Међу примерима који припадају неком појму постоје и они који имају нека својства, док их други такви примери немају. На пример, неке столице су дрвене, неке металне или пластичне, једне су беле, друге жуте или неке друге боје итд. Сва поменута својства нису битна за одређивање појма „столица“, па их колективно сврставамо у *шум*. (Реч „шум“ се првобитно користила да означи све оне звукове који ометају пријем чисте информације, а данас је стекла и ово, много шире значење.) Сам процес апстраховања састоји се од уочавања и издвајања битних својстава, али такође и од занемаривања оних небитних, тј. од потискивања шума.

Назив је записивање (или кодификација) појма у подручју језика. За ту сврху се користе конвенционални симболи, као што су слова или цифре. Ови симболи сами по себи не сугеришу значење појмова, него су искључиво у функцији означавања.

Постоје други, за почетну наставу нарочито важни знаци, које називамо слике (или иконе). Кад представљају физичку реалност, оне су њен упрошћени приказ и међукорак ка свету имагинације. Али и кад хоћемо да наше унутрашње представе објективизујемо, ми се такође служимо сликама. Такве слике морају бити са што мање шума – једноставне и правилне. Кад лењиром нацртамо праву линију, онда то што видимо је симбол-слика која представља ту линију, а не она сама, без обзира на наш уобичајени начин изражавања. Исто је тако траг креде на табли, кад цртамо шестаром, симбол-слика која представља круг.

Иконичко представљање је изузетно важно у раној настави математике, на њему се треба дуже задржавати и оно мора претходити симболичком представљању.

За појам P рећи ћемо да је општији (апстрактнији) од појма Q ако је Q пример за P. На пример, један низ све општијих појмова био би: квадрат, правоугаоник, паралелограм, четвороугао. Сваки од ових појмова је пример за следећи појам. Кад одређујемо појмове дефиницијом, сводимо их на још општији додавањем карактеристичних својстава. На пример кажемо: квадрат је правоугаоник чије су све странице једнаке, правоугаоник је паралелограм чији су сви углови прави, паралелограм је четвороугао чије су наспрамне странице паралелне итд.

У почетној настави математике деца се прво упознају са конкретнијим појмовима, па тек много касније са онима знатно апстрактнијим. Самим тим не можемо очекивати да ће покушај дефинисања појмова у овој фази наставе имати икакав смисао. Зато се у тој настави појмови формирају слично формирању многих других општих појмова. Наиме, прво се издвајају и групишу примери везани за одређени појам, са тим примерима се улази у планиране активности коришћењем дидактичког материјала, цртањем и доцртавањем итд, а уз то долази још одговарајуће именовање и симболичко записивање. Кроз такве активности појмови се поступно граде, тј. омеђује се подручје примера, формирају унутрашње представе и врши прецизна језичка кодификација.

На крају рецимо и то да се настава математике у току дугог низа година изводи на све апстрактнијим нивоима. Почетна настава је период кад су математички појмови опажајни, тј. сви одговарајући примери су из природног окружења или су дати у виду слика. Тај период се сматра значајним за све оне који за њим долазе, а ту формирана знања и умења су неопходна за све даље процесе учења.

Наставу математике у почетним разредима основне школе садржајно чине две велике теме: аритметика и геометрија, па ћемо укратко рећи оно што је битно о њима, везано за садржаје првог разреда.

2. Аритметика

Најелементарнија, а самим тим и најфундаменталнија грана математике је аритметика. Корен те грчке речи јесте број, што сугерише чињеницу да су бројеви њени основни објекти.

Свакој представи о броју претходи представа о групи објеката, што, коришћењем стручног језика, можемо исказати говорећи о представи о конкретном скупу. А како од те примарне представе о скупу апстраховањем долазимо до представе о броју, следићемо идеју великог класичног математичара Г. Кантора. Све почиње фиксирањем представе о неком конкретном скупу A, затим занемарујемо природу његових елемената, а резултат те апстракције означава се са $\overline{A}$. Затим занемарујемо распоред елемената (начине како су поређани или груписани), из чега резултира чиста идеја о броју елемената тог скупа, што се означава са $\overline{\overline{A}}$.

Тај пут од конкретног скупа A до броја његових елемената $\overline{\overline{A}}$ следимо и у почетној настави математике, разрађујући га у виду многих дидактичких процедура.

У теорији скупова каже се да су два скупа једнакобројна ако се између њих може успоставити обострано једнозначно пресликавање. Али тиме се не каже и колико су они бројни. За то треба имати неки стандардни скуп у односу на који треба успостављати таква пресликавања. Примитиван човек се у прошлости служио у ту сврху прстима руку или нискама каменчића, док савремен човек користи низ речи из природног језика: један, два, три, ... , постижући тако тај циљ. Међутим, цео систем природних бројева може се изградити само када се уведу операције (пре свега, сабирање и множење). Као што знамо из историје математике, стари Египћани су свој бројевни систем засnивали адитивно (тј. на идеји сабирања), па су тако могли записивати и веће бројеве (у границама потребе њихове цивилизације). Бројевни системи засновани на мултипликативној основи омогућавали су неограничено записивање све већих бројева. Код старих Грка дописивање црте испред слова које је означавало број значило је множење са 1000, док у нашем позиционом систему померање цифре за једно место улево у бројевном запису значи множење са 10. Из изложеног је јасно зашто дете учећи прве бројеве учи и операције са њима.

Важно је истаћи да су у овом периоду наставе бројеви и операције са њима такође опажајни појмови који се граде у контакту детета са одговарајућим примерима из његовог природног и друштвеног окружења или са оним који су представљени иконички, путем слика.

Садржајно је аритметички материјал у првом разреду разбијен на дидактичке блокове. Прво се јавља, истина мање наглашен, блок бројева до 5. Ту се уводи операција сабирања, а сам се блок проширује изразима у виду збира где су сабирци до 5, а вредност му премашује 5. Главни разлог за издвајање овог блока је то што деца брзо виде резултате сабирања и у том оквиру још нема правог рачунања, па пажњу окрећу начину записивања бројева и употреби операцијских знакова.

Блок бројева до 10 издваја се као целина у оквиру које сваки број има свој знак (сем броја 10), а такође и тиме што ти бројеви посредством операција сабирања и множења генеришу све друге бројеве. Ту се такође утемељују својства размене места сабирака и здруживања сабирака, која су основа за методу прелаза преко 10, у оквиру блока бројева до 20.

Бројеви до 20 су природна целина затворена за вредност збирова са једноцифреним сабирцима. Основни оперативни циљ у оквиру овог блока јесте изградња таблица сабирања и одузимања, са спонтаним запамћивањем резултата. Томе посебно доприносе бројевне слике у виду слагалица штапића, које се врло доследно користе уз сваку врсту оперисања симболима.

3. Процедурално изражавање и држачи места

Неку врсту нашег знања или умења формирамо, односно изражавамо процедурално ако то радимо поступајући правилно од примера до примера. Рецимо, говорећи својим матерњим језиком, можемо правилно формирати падешке облике именица које користимо а да при том не морамо обавезно знати одговарајућа граматичка правила. Тада је наше процедурално знање добро, а оно декларативно слабо. Обрнуто, кад говоримо неки страни језик, може се десити да добро знамо његова граматичка правила али да у говору ипак правимо грешке. Тада би наше декларативно знање било добро, а оно процедурално слабо.

У раној настави математике садржаји се, пре свега, уче процедурално и на тај начин ученик најбоље исказује своје знање.

За ту сврху користе се тзв. држачи места, квадратићи у које се уписују или црте над којим се пишу бројеви који недостају да би се формирао неки израз или допунила нека једнакост. Држачи указују на празно место и њима не треба приписивати никакву бројевну вредност. Било би, на пример, погрешно решавати једначину $\square + 3 = 8$ тако што би се писало $\square = 8 - 3$, јер они нису замена за слова у означавању непознате.

Кад обрађујемо неки поступак процедурално, рецимо сабирање са прелазом преко 10, примере програмирамо користећи држаче места. На пример:

$$7 + 5 = 7 + 3 + \_\_ = 10 + \_\_ = \_\_\,.$$

Ученик ће, допуњујући, прво разбити 5 на сабирке, затим ће здружити 7 и 3 и, најзад, све свести на лако сабирање $10 + 2$. Приметимо да се на првим двема цртама пише 2, а на трећој 12, из чега закључујемо да црта као држач места нема никакву фиксирану бројевну вредност.

Прелазећи са $7 + 5$ на $10 + 2$ примењујемо правилно здруживање сабирака. Али то правило, као и сва друга, треба изражавати на инваријантан начин. Будимо прецизнији да кажемо шта то значи.

Рецимо кад пишемо једнакост

$$7 + 6 + 3 = 10 + 6,$$

ми процедурално изражавамо правило здруживања. Заменимо ли бројеве 3, 6, 7 и 10 са било која друга четири, та једнакост не мора више бити тачна. (Заменимо их, на пример, редом бројевима 1, 4, 8, 12, добијена једнакост $8 + 4 + 1 = 12 + 4$ више није тачна.) Дакле, та форма изражавања правила није инваријантна, већ зависи од посебно одабраних бројева. Пишемо ли, пак

$$7 + 6 + 3 = 7 + 3 + 6,$$

добићемо инваријантну форму записа и заменом бројева 3, 6, 7 било којом другом тројком увек се добија тачна једнакост.

Кад се тумаче основна правила, важно је да их пишемо и у инваријантном облику, јер ће ученику који се навикао да пише једнакости попут $3+7 = 7+3$ лако бити да разуме и прихвати ону словну: $m + n = n + m$. Ово је, такође, један од примера нових оперативних задатака наставе математике у нижим разредима, где се у оквирима аритметике формирају способности без којих би каснија настава алгебре била пука игра словима. Видимо да су и за овај оперативни задатак држачи места захвално техничко средство.

4. Геометрија

Још у античким временима, са појавом Еуклидових *Елемената*, геометрија је, као прва од свих наука, добила своју строгу логичку форму. Тима су се изгубила сва она интуитивна значења која су историјски томе претходила. Као једна од седам класичних уметности, она је у средњовековној школи укључивана у квадривијум и тако била намењена одраслијим ученицима. Временом су писане упрошћене верзије *Елемената* и ти рукописи се могу сматрати првим школским уџбеницима. Али и поред тога геометрија је остала далеко од почетне наставе математике све до новијег времена.

Почетком 20. века Татјана Афанасјевна Еренфест и њен супруг Паул Еренфест (познати холандски физичар) почели су да третирају геометрију као науку о материјалном свету, враћајући тако њеним апстракцијама изгубљено интуитивно значење. Од тада, постепено, неки геометријски садржаји почињу да се јављају и у програмима нижих разреда основне школе.

Према Ж. Пијажеу, дете на бази својих визуелних опажаја спонтано развија неке геометријске представе, и то прво оне тополошке, затим пројективне и најзад, метричке природе. Метричка својства зависна су од мера елемената неког геометрисјког објекта (дужине страница, величине углова итд), а геометрија која се учи у средњој школи је метричка и зато њу читаоцу није потребно посебно објашњавати. Пројективна геометрија је општија, а тополошка још много општија и од ње, па ћемо то на популаран начин овде објаснити.

Пројективна својства су она која се чувају при пројектовању, тј. има их истовремено неки предмет и његова сенка. Сенка троугаоне плоче је такође троугаоног облика, али сенка правоугаоне плоче може бити искошена. Значи, бити троугао је пројективно својство, али бити правоугаоник – није. Пројективна својства су, на пример, бити права линија (прав штап баца праволинијску сенку), бити четвороугао итд.

Кад је модел неког геометријског објекта направљен од врло пластичног материјала, можемо га деформисати развлачењем или скупљањем (не кидајући и не преклапајући га). Његов облик и величина се тада мењају, а она својства која се не мењају јесу тополошка.

Својства линија да су отворене или затворене чувају се при деформацији, па су тако тополошка. Својства бити линија, површ или тело су такође тополошка (а често у тим случајевима говоримо да је објекат једне, две или три димензије). Однос да је тачка у или ван затворене линије не зависи од облика и величине те линије, па је такође тополошки.

Надамо се да је читаоцу ово довољно да прави разлику између три врсте геометријских својстава која се јављају у садржајима млађих разреда основне школе.

Напоменимо, на крају, да на овом нивоу деца доживљавају геометријске објекте као реалне, па и онда кад су они представљени сликама. Зато и не говоримо да је неки објекат, на пример, квадар, него да има облик квадра. Изузетак могу бити лопта и коцка, као речи присутне у језику детета и пре његовог поласка у школу, али и тада се њима означавају реални објекти или слике које те објекте представљају. Постепено, од разреда до разреда, геометријске термине све више вежемо за слике којима их представљамо и тако повећавамо степен апстрактности. Тада уместо уочавања и разликовања почиње издвајање и анализа карактеристичних својстава. Али то не значи да ће претходно формирано знање и способности тиме бити превазиђени; напротив, они остају као чврста основа за све даље кораке.