Др Бранислав Боричић

ТЕШКО БЕЗ ИНДУКЦИЈЕ

У литератури, али и у наставничкој пракси, често се истиче погрешна теза да се из неких доказа индукција као метод, уз добру досетку, може заобићи. Таквих констатација је било и у овом часопису, а осврт који управо читате, добрим делом, је настао тим поводом.

Индукција је методолошки принцип који нам омогућује да превалимо пут од света појединачног до света општег. Како се ради о најједноставнијем могућем механизму, који нас води и до најједноставнијег света од свих „светова у којима живе бесконачности“, индукција заузима и почасно место у методици математике, па јој се свакако мора посветити дужна пажња. Циљ овог чланка је само да истакне једну чињеницу: доказе у којима правимо корак од коначног до пребројивог *најчешће није могуће* извести без примене принципа математичке индукције. Може нам се некада учинити да примена метода индукције није есенцијална у неком доказу, али ће се, по правилу, испоставити да смо направили неки превид, позивајући се на неки аргумент за чије је оправдање индукција ипак неопходна. Укратко, како се код нас сликовито каже, „ако не платиш на мосту, платићеш на ћуприји“.

Када доказујемо да *сваки елемент* неког *индуктивно дефинисаног скупа* има одређено својство, индукција тешко да се може избећи. Тачније, примена метода математичке индукције неће бити неопходна тек у случајевима када се ради о последицама аксиома једнакости или неких других специфичних аксиома разматране математичке теорије. Да би овакав став био јаснији, посматрајмо, над скупом реалих бројева, следеће формуле:

$$a_1 - a_2 = a_1 - a_2 \tag{1}$$

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) = a_1 - a_n \tag{2}$$

$$(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_{99} - a_{100}) = a_1 - a_{100} \tag{3}$$

Формула (1) је евидентно тачна, као и формула (3) у којој су *три тачке* скраћеница за 96 сабирака, чијим би се исписивањем и одговарајућим потирањима образложила ова формула. Међутим, формула (2) је *битно другачија* од формуле (3). Она је, једноставно, општија (садржи случајеве формула (1) и (3), као и

Рад на овом чланку је делом финансирало Министарство за науку, технологије и равој Републике Србије, пројекат број 1335.

бесконачно много других случајева) и да би се иста ваљано образложила *неопходно је* посегнути за принципом математичке индукције. Дакле, колико год то изгледало тривијално, образложење да, за *сваки природан број* $n \geq 2$, формула (2) важи, морало би изгледати овако:

Базу индукције оправдава формула (1). Док нам трансформација:

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1}) &= (a_1 - a_n) + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1}\end{aligned}$$

уз јасно засновану прву једнакост на индукцијској хипотези, даје за право да утврдимо да је формула (2) тачна, за *сваки природан број* $n \geq 2$. Индукцијска хипотеза је имала ту моћ да из даљег разматрања елиминише *три тачке* које су у овом случају биле замена за *произвољан, али коначан, број сабирака.*

Поред скупа природних бројева (и неких његових подскупова), индуктивно се дефинишу скупови израза, скупови теорема неке аксиоматске теорије, формални докази, алгоритми и програми, ... И како ови скупови представљају један, квалитативно и квантитативно, значајан део свеколике математике, конституисана је *теорија индуктивних дефиниција* (или *теорија рекурзивних функција*) у којој *индукција* представља *почетак* и *завршетак свега.*

Моћ индукције је у томе што нам пружа могућност да *у коначно много корака* образложимо једно тврђење које се односи на *потенцијално бесконачно много елемената.* Сем тривијалних изузетака, индукција представља *једини начин* да се дâ ваљан и уверљив доказ. На пример, у формалној Пеановој аритметици, и тако „очигледна“ тврђења, као што су комутативност и асоцијативност сабирања природних бројева, немогуће је образложити без примене принципа математичке индукције.

Надам се да ће читалац имати разумевања за овакву врсту текста чији је превасходни циљ да јасније презентира једно виђење улоге тако значајног методолошког принципа какав је индукција и чији статус, несумњиво, спада у питања која су од ширег интереса.

На крају, укажимо на штампарске грешке у броју XLVII, свеска 3-4, 2002, овог часописа, у чланку на тему индукције, где две базичне формуле, на страни 28, исправљене, треба да гласе овако:

$$(\forall k \geq k_0)(k \in M \to k+1 \in M),$$
$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbf{N})(P(n) \to P(n+1)) \to (\forall n \in \mathbf{N})P(n).$$