

Богдан Радаковић

**О КОНСТРУКЦИЈИ ЈЕДНАКОКРАКОГ ТРОУГЛА
СА ПОЛУПРЕЧНИКОМ УПИСАНОГ КРУГА $r = 1$**

Ова тема која на први поглед изгледа једноставно, развила се на врло интересантан начин. На предавањима из Алгебре 2, професор Жарко Мијајловић поставио је следећи проблем:

ЗАДАТАК. Доказати да се једнакокраки троугао чији је крак $b = 3$ и полупречник уписаног круга $r = 1$ не може конструисати.

Детаљан опис мог решења овог задатка биће изнет касније. Када сам професору рекао да сам решио задатак, изненадило ме је његово питање, да ли такав троугао уопште и постоји?! Испоставило се, наравно, да такав троугао не постоји, па каквог смисла онда има дискутовати о конструкцији таквог троугла?!

Да би ова тема била разумљивија ширем кругу читалаца, увешћу неколико основних појмова о конструкцијама лењиром и шестаром, као што су конструктивни реални бројеви и Питагорејска раван.

1. Конструкције лењиром и шестаром

Нека је OA јединична дуж у комплексној равни $\mathbf{C}$ одређена тачкама $O(0, 0)$ и $A(0, 1)$. Тачка $M(x, y) \in \mathbf{C}$ је конструктивна ако се може добити елементарним конструкцијама помоћу лењира и шестара у коначно много корака полазећи од дужи OA . Прецизније, конструктивне тачке, дужи, праве и кружнице уводе се следећим аксиомама:

- A1.** Тачке O и A су конструктивне.
- A2.** Ако су B и C конструктивне тачке и $B \neq C$, онда је права (дуж) одређена тачкама B и C конструктивна.
- A3.** Кружница која има конструктиван центар и конструктиван полупречник је конструктивна.
- A4.** Пресек две конструктивне праве је конструктивна тачка.
- A5.** Пресек конструктивне праве и конструктивне кружнице је конструктивна тачка.
- A6.** Пресеци две конструктивне кружнице су конструктивне тачке.

Скуп конструктивних тачака $\mathbf{P}$ у $\mathbf{C}$ назива се *Питагорејском равни*. Ако је $M(x, y) \in \mathbf{P}$, тада се x , y називају конструктивним реалним бројевима и скуп конструктивних реалних бројева означавамо са $\mathbf{K}_R$. Да споменем и да је $\mathbf{Q} \subset \mathbf{K}_R$.

Користиће нам и следеће тврђење чији доказ нећу дати с обзиром да се оно стандардно доказује у вишим курсевима алгебре.

ТВРЂЕЊЕ. Нека $p \in \mathbf{Q}[x]$, $\deg p = k \geq 1$ и p несводлив, тада ако је $p(\alpha) = 0$ и $k \neq 2^n$ где $n \in \mathbf{N}_0$, онда $\alpha \notin \mathbf{K}_R$.

НАПОМЕНА. 1) $\deg p$ јесте степен полинома p .

2) p је несводлив ако не постоје $q, r \in \mathbf{Q}[x]$ тако да је $\deg q, \deg r \geq 1$ и $p = qr$.

ПРИМЕР 1. Ако је полином $p \in \mathbf{Z}[x]$ трећег степена облика $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ сводљив у пољу $\mathbf{Q}[x]$, те он има целобројну нулу, тј. за неки $\alpha \in \mathbf{Z}$, $p(\alpha) = 0$, тада и $\alpha \mid c$.

Доказ. Ако је полином трећег степена сводљив, тада он мора имати фактор првог степена, па самим тим има и бар једну рационалну нулу. Претпоставимо да је $p(e/f) = 0$, где су e и f узајамно прости цели бројеви и $f \neq 0$. Тада имамо

$$p\left(\frac{e}{f}\right) = \left(\frac{e}{f}\right)^3 + a\left(\frac{e}{f}\right)^2 + b\frac{e}{f} + c = 0,$$

одакле множењем са f^3 добијамо $e^3 + ae^2f + bef^2 + cf^3 = 0$, а из тога следи да $f \mid e^3$, тј. $f \mid 1$, па $\alpha = e/f \in \mathbf{Z}$. На сличан начин доказујемо да $\alpha \mid c$.

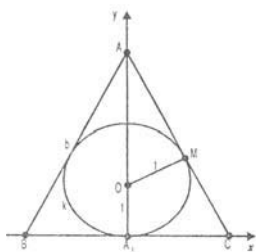
ПРИМЕР 2. $\sqrt[3]{2} \notin \mathbf{K}_R$.

Доказ. Нека је $p(x) = x^3 - 2$. Тада је $\deg p = 3$, $p(\sqrt[3]{2}) = 0$ и $p(x)$ је несводљив (када би $p(x)$ био сводљив, тада би према претходном примеру постојао $\alpha \in \mathbf{Z}$, тако да је $\alpha^3 = 2$, што је немогуће), и пошто је $3 \neq 2^n$ где $n \in \mathbf{N}_0$, имамо да $\sqrt[3]{2} \notin \mathbf{K}_R$.

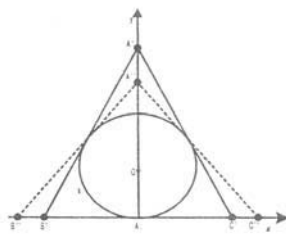
2. Решење проблема

Одредимо за које вредности крака b једнакокраког троугла са полупречником уписаног круга $r = 1$ можемо конструисати тај троугао.

Поставимо координатни систем (слика 1) тако да основца $BC = a$ припада x -оси а висина AA_1 једнакокраког троугла ABC ($AB = AC = b$) припада ненегативном делу y -осе. Тада је центар координатног система тачка A_1 , а координате центра круга k уписаног у тај троугао су $O(0, 1)$.



Сл. 1



Сл. 2

Нека је M додирна тачка круга k и крака AC . Тада је $\triangle AA_1C \sim \triangle AMO$ ($\angle AA_1C = \angle AMO = 90^\circ$, $\angle CAA_1 = \angle OAM$), па имамо да је

$$\frac{A_1C}{MO} = \frac{CA}{OA} > \frac{AA_1}{OA} = \frac{OA + OA_1}{OA} = 1 + \frac{1}{OA} > 1$$

($CA > AA_1$ јер је хипотенуза у правоуглом троуглу увек већа од катете). Пошто је $MO = 1$, имамо да је $A_1C > 1$.

За произвољну тачку x -осе C' , тако да је $A_1C' > 1$, троугао који задовољава услове задатка добијамо на следећи начин. Из тачке C' повучемо тангенту на круг k која се разликује од x -осе и у пресеку те тангенте са y -осом добијамо тачку A' . Тачку B' добијамо када тачку C' пресликамо симетрично у односу на y -осу. На тај начин добијамо све једнакокраке троуглове са полупречником уписаног круга $r = 1$ (слика 2).

Да видимо шта се дешава када тачку C померамо дуж x -осе и то од тачке $(1, 0)$ па до бесконачности. Можемо интуитивно приметити да ће онда крак AC тежити бесконачности када тачку C приближавамо тачки $(1, 0)$ или када је удаљавамо у бесконачност (касније ће то бити и доказано). Пошто је $AC > AA_1 > 2$, поставља се логично питање за коју вредност дужине A_1C ће крак имати минималну вредност. Односно за коју минималну вредност крака b тај троугао уопште и постоји.

Из сличности троуглова AA_1C и AMO имамо

$$(1) \quad \frac{AC}{A_1C} = \frac{AO}{MO},$$

а из Питагорине теореме примењене на троугао AA_1C добијамо

$$(2) \quad AA_1 = \sqrt{AC^2 - A_1C^2}.$$

Заменом $AC = b$, $A_1C = \frac{a}{2}$, из (1) и (2) добијамо

$$\frac{b}{a/2} = \frac{AA_1 - OA_1}{1} = AA_1 - 1 = \sqrt{AC^2 - A_1C^2} - 1 = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} - 1,$$

односно $\frac{2b}{a} + 1 = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Квадрирањем ове релације и сређивањем добијамо

$$(3) \quad 4b^2(4 - a^2) + 16ab + 4a^2 + a^4 = 0.$$

Пошто је $A_1C > 1$, имамо да је $\frac{a}{2} > 1$, односно $a > 2$, па једначину (3) у којој узимамо да нам је b непозната решавамо под условом да је $a > 2$, што ће нам олакшати решавање.

Решења квадратне једначине (3) су

$$b_{1,2} = \frac{-4a \pm a^3}{2(4 - a^2)}.$$

Решење са + отпада јер би онда $b = \frac{-4a + a^3}{2(4 - a^2)} = -\frac{a}{2}$, па како је $a > 2 > 0$, имали бисмо да је $b < 0$ што је немогуће. Дакле, имамо

$$b = \frac{-4a - a^3}{2(4 - a^2)} = \frac{a^3 + 4a}{2(a^2 - 4)}$$

и сада треба одредити за које $a > 2$, b има минималну вредност.

Посматрајмо рационалну функцију $f(x) = \frac{x^3 + 4x}{2(x^2 - 4)}$ за $x > 2$. Испитивањем ове функције налазимо:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 16x^2 - 16}{2(x^2 - 4)^2} \quad \text{и} \quad f''(x) = \frac{8x^5 + 64x^3 - 384x}{(x^2 - 4)^4}.$$

Дакле, $f'(x) = 0 \iff x^4 - 16x^2 - 16 = 0$, па су решења једначине $f'(x) = 0$, $x_{1,2}^2 = 8 \pm 4\sqrt{5}$. Пошто је x реално и $x > 2$, бирамо само решење $x_0^2 = 8 + 4\sqrt{5}$, односно $x_0 = 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Доказујемо да у тачки x_0 функција $f(x)$ за $x > 2$ има минималну вредност. Како је $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = f''(2\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \approx 0,46 > 0$, то у тачки x_0 функција има локални минимум. Пошто је

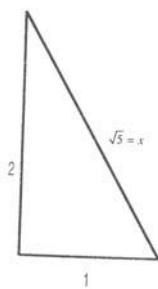
$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^3 + 4x}{2(x^2 - 4)} = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 4x}{2(x^2 - 4)} = +\infty,$$

функција $f(x)$ у тачки $x_0 = 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ достиже минимум за $x > 2$.

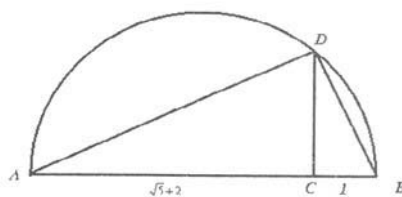
Дакле, минималан крак b за који уопште постоји такав троугао је

$$b = f(2\sqrt{2 + \sqrt{5}}) = \frac{x_0^3 + 4x_0}{2(x_0^2 - 4)} \approx 3,33.$$

Поставља се питање да ли тај троугао, где је $a = 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, може да се конструише. Довољно је доказати да је a конструктиван, јер када a може да се конструише, онда може и b . (Јер, ако може a , онда може и $A_1C = a/2$, па може и цео троугао чију смо конструкцију већ описали, види слику 2.) Могуће је, и конструкција се изводи на следећи начин. Конструисаћемо реалан број $A_1C = a/2 = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$. Прво конструисамо $\sqrt{5}$ на следећи начин (слика 3), као хипотенузу правоуглог троугла са катетама 1 и 2, јер је онда $x = \sqrt{2^2 + 1^2}$.



Сл. 3



Сл. 4

Конструишемо дуж AB дужине $\sqrt{5} + 3$ и над њом полукруг чији је пречник баш та дуж (слика 4). Уочимо тачку C коју такође можемо да конструишемо тако да је $AC = \sqrt{5} + 2$ и $BC = 1$. Повучемо нормалу у тачки C на дуж AB и у пресеку са полукругом добијемо тачку D . Како је троугао ABD правоугли и CD је висина из темена D на хипотенузу AB , тада је $DC^2 = AC \cdot CB$ (познато својство правоуглог троугла). Отуда је $CD = \sqrt{AC \cdot CB} = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$. Дуж $A_1C = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ може да се конструише, дакле може и троугао.

Одредимо за које $b > b_0 = f(2\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \approx 3,33$ се троугао може конструисати. Пошто је $b = \frac{a^3 + 4a}{2(a^2 - 4)}$, ако је a конструктиван реалан број ($a > 2$), онда је и b конструктиван. Дакле, $\mathbf{B}$ – скуп свих свих b за које је троугао конструктиван – је

$$\mathbf{B} = \left\{ \frac{a^3 + 4a}{2(a^2 - 4)} \mid a > 2, a \in \mathbf{K}_R \right\},$$

где је $\mathbf{K}_R$ скуп свих конструктивних реалних бројева. Да је произвољан троугао конструктиван када $b \in \mathbf{B}$ показујемо на следећи начин: пошто је $b = \frac{a^3 + 4a}{2(a^2 - 4)}$, онда је $a^3 - 2ba^2 + 4a + 8b = 0$, тј. добијемо једначину коју можемо да решимо помоћу радикала, па по самом избору броја b једно од тих решења је конструктивно a . Може се показати да за произвољно $b \in \mathbf{B}$ и $b \neq b_0$ увек постоје два решења (што је интуитивно јасно), док за $b = b_0$ постоји тачно једно решење. (Доказује се директно анализом ове једначине трећег степена.)

Дакле, троугао може да се конструисе ако $b \in \mathbf{B}$ и минимално b из тог скупа добија се за $a_0 = 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}$, $b_0 \approx 3,33$.

ПРИМЕР 3. Једнакокраки троугао чији је крак $b = 3$ и полупречник уписаног круга $r = 1$ не може да се конструише.

Доказ. Применом претходног задатка видимо да такав троугао и не постоји па самим тим не може да се конструише.

Моје прво решење овог задатка:

Задатак сам решавао слично као и цео овај проблем па сам закључио да важи $a^3 - 2ba^2 + 4a + 8b = 0$, тј. у овом случају $a^3 - 6a^2 + 4a + 24 = 0$. Пошто је овај полином несводљив (једноставно се проверава применом примера 1) и степен овог полинома је $3 \neq 2^n$ за $n \in \mathbf{N}_0$ (погледати тврђење), закључио сам да ниједан корен ове једначине трећег степена није конструктиван реалан број, па самим тим тај троугао не можемо конструисати јер бисмо онда могли да конструишемо и основицу a која је неконструктивна, контрадикција! И све би ово било тачно да такав троугао постоји. Интересантно је напоменути да студенти сваке године на курсу из Алгебре 2 код професора Ж. Мијајловића направе исту грешку.

ПРИМЕР 4. Једнакокраки троугао чији је крак $b = 5$ и полупречник уписаног круга $r = 1$ не може да се конструише.

Доказ. Применом претходне анализе имамо $a^3 - 2ba^2 + 4a + 8b = 0$, тј. $a^3 - 10a^2 + 4a + 40 = 0$. Није тешко доказати да је овај полином несводљив

над $\mathbf{Q}$. Анализом као у претходном примеру закључујемо да је такав троугао немогуће конструисати ($5 > 3,33$ па такав троугао постоји).

Занимљиво је размотрити следећи проблем.

ПРИМЕР 5. Одредити за које $b \in \mathbf{N}$ је могуће конструисати тај троугао.

Решење. Претпоставимо да је за неко $b \in \mathbf{N}$ могуће конструисати троугао. Тада применом већ доказаног имамо да важи $a^3 - 2ba^2 + 4a + 8b = 0$, и имамо да је тај полином сводљив (јер када не би био сводљив, применом претходног примера видимо да би онда тај троугао био неконструктиван), па применом примера 1 закључујемо да постоји $\alpha \in \mathbf{Z}$ тако да $\alpha \mid 8b$ и $\alpha^3 - 2b\alpha^2 + 4\alpha + 8b = 0$. Даље, пошто су сви сабирци цели бројеви, имамо да $2 \mid \alpha^3$ тј. $2 \mid \alpha$, па је за неко $c \in \mathbf{Z}$, $\alpha = 2c$, па заменом и скраћивањем добијамо $c^3 - bc^2 + c + b = 0$. Даље закључујемо да $c \mid b$, па ако је $b = cd$, заменом и скраћивањем добијамо $c^2 - c^2d + d + 1 = 0$ односно $c^2(d - 1) = d + 1$. Како је $\text{НЗД}(d + 1, d - 1) = 1$ или 2 и $d - 1 \mid d + 1$, онда је $d - 1$ једнако ± 1 или ± 2 , па имамо следеће случајеве:

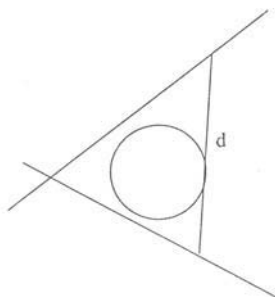
1) $d - 1 = -1$ одакле је $d = 0$ па и $b = 0$ а то је немогуће.

2) $d - 1 = -2$ одакле је $d = -1$ па $c = 0$ и $b = 0$ а то је немогуће.

3) $d - 1 = 1$ одакле је $d = 2$ и $c^2 = 3$ па c није цео број а то је контрадикција.

4) $d - 1 = 2$ одакле је $d = 3$ и $c^2 = 2$ па c није цео број а то је контрадикција.

Овим смо доказали да не постоји природан број b (дужина крака) тако да троугао буде конструктиван, мада за $b \geq 4$, како смо видели, такав троугао постоји!



Сл. 5

На крају само да споменем да је овај проблем специјалан случај следећег далеко општијег проблема.

ПРОБЛЕМ. Ако су дате две праве и круг у равни и дуж фиксне дужине d , конструисати дуж те дужине тако да јој један крај припада једној правој, други другој правој и да додирује дати круг.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. Перић, *Алгебра*, Свјетлост, Сарајево 1980.
- [2] А. Clark, *Abstract Algebra*, Dover Publ. Inc., New York, 1984.