НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2003, XLVIII, 3–4, стр. 1–7

Др Шефкет Арсланагић

НЕЈЕДНАКОСТ ЧЕБИШЕВА И ЊЕНА ПРИМЈЕНА

У овом раду ћемо дати два доказа познате *неједнакости Чебишева*[1] и неколико интересантних примјена те неједнакости. Неједнакост Чебишева гласи:

Нека су низови (n-торке) $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ монотони у истом смислу, тј. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$ или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n$, ($a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$). Тада вриједи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{1}$$

Ако су низови (n-торке) $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ монотони у супротном смислу, тј. $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n$ или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$, ($a_i, b_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$), тада вриједи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{2}$$

Једнакост у (1) и (2) вриједи онда и само онда ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ или $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Даћемо два доказа неједнакости (1) јер се неједнакост (2) доказује на потпуно аналоган начин. Ево тих доказа.

Доказ 1. Нека су низови $\{a_i\}_{i=1}^n$ и $\{b_i\}_{i=1}^n$ монотони у истом смислу. Тада вриједи

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \\
&\iff n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geqslant 0 \\
&\iff (n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i \neq j} a_i b_i \geqslant 0
\end{aligned}$$

[1] П. Л. Чебышев (1821--1894), руски математичар

$$\iff \sum_{i\neq j} a_i(b_i - b_j) \geqslant 0$$

$$\iff 2\sum_{i\neq j} a_i(b_i - b_j) = \sum_{i\neq j}(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geqslant 0,$$

а ово је тачно за низове монотоне у истом смислу, а једнакост вриједи само онда ако су сви сабирци једнаки нули, тј. онда и само онда ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ или $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$. Наравно, иста аргументација вриједи код доказа неједнакости (2).

Доказ 2. Овдје ћемо користити принцип математичке индукције. Нека су низови $\{a_i\}_{i=1}^n$ и $\{b_i\}_{i=1}^n$ монотони у истом смислу.

За $n = 1$ добијамо из (1):

$$a_1 b_1 \geqslant \frac{1}{1} a_1 b_1,$$

што је очигледно тачно.

Нека је неједнакост (1) тачна за неко $n \geqslant 1$, тј. вриједи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Докажимо да тада (1) вриједи и за $n+1$, тј. да вриједи

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i\right).$$

Краткоће писања ради, ставимо да је $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ и $B = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$. На основу претпоставке индукције слиједи

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a_{n+1} b_{n+1} \geqslant \frac{1}{n} AB + a_{n+1} b_{n+1}. \tag{3}$$

Преостаје нам да докажемо да је

$$\frac{1}{n} AB + a_{n+1} b_{n+1} \geqslant \frac{1}{n+1}(A + a_{n+1})(B + b_{n+1}). \tag{4}$$

Неједнакост (4) је еквивалентна, редом, следећим неједнакостима:

$$(n+1)AB + n(n+1)a_{n+1}b_{n+1} \geqslant n(AB + Ab_{n+1} + Ba_{n+1} + a_{n+1}b_{n+1}),$$

$$AB + n^2 a_{n+1} b_{n+1} \geqslant nAb_{n+1} + nBa_{n+1},$$

$$(A - na_{n+1})(B - nb_{n+1}) \geqslant 0. \tag{5}$$

У случају када је $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1}$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{n+1}$ вриједи $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant na_{n+1}$, те $(A - na_{n+1}) \leqslant 0$, и аналогно, $B = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \leqslant nb_{n+1}$, те $(B - nb_{n+1}) \leqslant 0$. Сада је

$$(A - na_{n+1})(B - nb_{n+1}) \geqslant 0,$$

што значи да је (5) тачно, па је тачно и (4).

Из (3) и (4) добијамо да је

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i\right),$$

што је и требало доказати. Дакле, (1) је тачно за све $n \in \mathbf{N}$.

У случају када је $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{n+1}$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_{n+1}$ добијамо аналогно

$$(A - na_{n+1}) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad (B - nb_{n+1}) \geqslant 0,$$

те $(A - na_{n+1})(B - nb_{n+1}) \geqslant 0$, па слично као у претходном случају слиједи закључак.

Једнакост вриједи очигледно када је једна од горњих заграда једнака нули, тј. када је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ или $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

На потпуно аналоган анчин се доказује неједнакост (2) када су низови монотони у супротном смислу.

Напомена. Доказује се да вриједе неједнакости

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

у случају када су низови $\{a_i\}_{i=1}^n$ и $\{b_i\}_{i=1}^n$ монотони у истом смислу, те

$$\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}$$

у случају када су низови $\{a_i\}_{i=1}^n$ и $\{b_i\}_{i=1}^n$ монотони у супротном смислу.

Сада ћемо дати неколико примјера неједнакости које се доказују примјеном неједнакости Чебишева.

Примјер 1. Нека су α, β, γ углови троугла (мјерени у радијанима); a, b, c дужине његових страница. Тада вриједе неједнакости:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geqslant \frac{9}{\pi}, \tag{6}$$

$$\sum \frac{b + c - a}{\alpha} \geqslant \frac{6s}{\pi}, \qquad \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right), \tag{7}$$

$$\sum \frac{b + c - a}{a\alpha} \geqslant \frac{9}{\pi}. \tag{8}$$

Доказ. За доказ ћемо користити неједнакост Чебишева. Ако је $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 > 0$ и $0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$, тј. $\dfrac{1}{y_1} \geqslant \dfrac{1}{y_2} \geqslant \dfrac{1}{y_3} > 0$, онда због (1) вриједи

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} \geqslant \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3}\right). \tag{9}$$

Користећи неједнакост између аритметичке и хармонијске средине за позитивне бројеве y_1, y_2, y_3, добијамо

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} \geqslant \frac{9}{y_1 + y_2 + y_3}. \tag{10}$$

Сада из (9) и (10) добијамо

$$\tag{11} \frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3} \geqslant 3\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{y_1+y_2+y_3}\right).$$

Докажимо сада (6). Стављајући у (11) да је $x_1=x_2=x_3=1$ и $y_1=\alpha$, $y_2=\beta$, $y_3=\gamma$ $(0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma)$, добијамо (због $\alpha+\beta+\gamma=\pi$):

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma} \geqslant \frac{9}{\pi}.$$

Докажимо (7). Стављајући у (11) да је $x_1=b+c-a$, $x_2=c+a-b$, $x_3=a+b-c$, те $y_1=\alpha$, $y_2=\beta$, $y_3=\gamma$, уз претпоставку да је $0<a\leqslant b\leqslant c$ те $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ (тада је $b+c-a\geqslant c+a-b\geqslant a+b-c>0$ и $\dfrac{1}{\alpha}\geqslant\dfrac{1}{\beta}\geqslant\dfrac{1}{\gamma}>0$), добијамо тражену неједнакост

$$\sum \frac{b+c-a}{\alpha} \geqslant 3\cdot\frac{2s}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{6s}{\pi}.$$

На крају докажимо и (8). Стављајући у (11) да је $x_1=\dfrac{b+c-a}{a}$, $x_2=\dfrac{c+a-b}{b}$, $x_3=\dfrac{a+b-c}{c}$, (због $0<a\leqslant b\leqslant c$ је $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3>0$, те $y_1=\alpha$, $y_a=\beta$, $y_3=\gamma$, $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$), добијамо

$$\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geqslant \frac{3}{\pi}\left(\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}\right),$$

односно

$$\sum \frac{b+c-a}{a\alpha} \geqslant \frac{3}{\pi}\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)-3\right].$$

Како је $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$ за $x,y>0$, неједнакост (8) је тачна.

Једнакост у неједнакостима (6), (7) и (8) вриједи само у случају када је у питању једнакостранични троугао.

Примјер 2. Доказати да вриједи неједнакост

$$\tag{12} \frac{4^n}{n+1} \leqslant \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \qquad n\in\mathbf{N}.$$

Доказ. Овакве неједнакости се због $n\in\mathbf{N}$ обично доказују помоћу математичке индукције. Но, ми ћемо овдје дати њен доказ помоћу неједнакости Чебишева (1). Најпре ћемо констатовати да након развијања лијеве и десне стране једнакости

$$(1+x)^{2n}=(1+x)^n(1+x)^n$$

по биномној формули, те множењем полинома на десној страни, коефицијенти уз члан x^n на лијевој и десној страни добијене једнакости износе $\dbinom{2n}{n}$ и $\sum\limits_{k=0}^{n}\dbinom{n}{k}^2$, тј. важи

$$\tag{13} \binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Сада због (13) имамо на основу неједнакости Чебишева:

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!}{(n!)^2} &= \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} \geqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)^2 = \frac{1}{n+1}(2^n)^2 = \frac{4^n}{n+1},\end{aligned}$$

што је требало доказати. Овдје смо користили чињеницу да је $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, те $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$.

Једнакост у (12) вриједи само у случају $n = 1$.

Примјер 3. Нека су $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ и $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Доказати да вриједи неједнакост

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}. \tag{14}$$

Доказ. Да бисмо доказали (14), доказаћемо најприје једну помоћну неједнакост

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n \leqslant k^{n-1}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n), \tag{15}$$

гдје је $k, n \in \mathbf{N}$ и $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}^+$. Једнакост вриједи само у случају $n = 1$ или $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$.

За $n = 1$ вриједи у (15):

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leqslant k^0(a_1 + a_2 + \cdots + a_k),$$

тј. вриједи једнакост. За $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$ добијамо из (15):

$$(ka_1)^n \leqslant k^{n-1}(ka_1^n),$$

гдје поново вриједи једнакост.

Преостаје нам да докажемо (15) у случају када је $n \geqslant 2$ и не вриједи $a_1 = a_2 = \cdots = a_k$, тј. треба доказати неједнакост

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n < k^{n-1}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n). \tag{16}$$

Не смањујући општост, можемо узети да је $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ и $a_1 < a_k$. Доказ ћемо спровести помоћу математичке индукције.

За $n = 2$ добијамо

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 < k(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2)\\ \iff\ & a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 + 2\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant k\\ i\neq j}} a_i a_j < k(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2)\end{aligned}$$

$$\iff 0 < (k-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2) - 2 \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} a_i a_j$$

$$\iff 0 < \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} (a_i^2 - 2a_i a_j + a_j^2) \iff 0 < \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant k \\ i \neq j}} (a_i - a_j)^2,$$

а ова неједнакост је тачна због претпоставке да је $a_1 < a_k$.

Претпоставимо да је неједнакост (16) тачна за неко $n \geqslant 2$. Докажимо да је ова неједнакост тачна и за $n+1$, тј. да вриједи

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^{n+1} < k^n (a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_k^{n+1}).$$

Имамо због претпоставке индукције

(17)
$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^{n+1} &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &< k^{n-1}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k).\end{aligned}$$

Доказаћемо сада да је

(18) $$(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n)(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) < k(a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_k^{n+1}).$$

Ова неједнакост еквивалентна је, редом, неједнакостима:

$$\begin{aligned}a_1^n(a_2 + a_3 + \cdots + a_k) + a_2^n(a_1 + a_3 + \cdots + a_k) + \cdots + a_k^n(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) \\ < (k-1)(a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_k^{n+1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 < a_1^n((k-1)a_1 - a_2 - \cdots - a_k) + a_2^n((k-1)a_2 - a_1 - a_3 - \cdots - a_k) \\ + \cdots + a_k^n((k-1)a_k - a_1 - \cdots - a_{k-1}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 < a_1^n((a_1 - a_2) + \cdots + (a_1 - a_k)) + a_2^n((a_2 - a_1) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_2 - a_k)) \\ + \cdots + a_k^n((a_k - a_1) + \cdots + (a_k - a_{k-1})),\end{aligned}$$

$$0 < \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (a_i^n - a_j^n)(a_i - a_j),$$

а последња неједнакост је тачна јер су изрази у заградама једнаког знака и овдје је $a_1 < a_k$. Дакле, неједнакост (18) је тачна па сада из (17) добијамо да је неједнакост (16) тачна и за $n+1$. Према томе, неједнакост (15) је тачна за свако $n \in \mathbf{N}$.

Пређимо сада на доказ неједнакости (14).

Не умањујући општост можемо узети да је $0 < a \leqslant b \leqslant c$, тј. $0 < a^n \leqslant b^n \leqslant c^n$ те $0 < \dfrac{1}{b+c} \leqslant \dfrac{1}{a+c} \leqslant \dfrac{1}{a+b}$; из неједнакости Чебишева (1) добијамо

(19) $$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{1}{3}(a^n + b^n + c^n)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right).$$

На основу неједнакости (15) за $k=3$ добијамо

$$a^n+b^n+c^n \geqslant \frac{1}{3^{n-1}}(a+b+c)^n,$$

те на основу неједнакости између аритметичке и хармонијске средине:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

Сада из (19) слиједи

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{a+c}+\frac{c^n}{a+b} \geqslant \frac{1}{3^n}(a+b+c)^n\frac{9}{2(a+b+c)},$$

тј. $\dfrac{a^n}{b+c}+\dfrac{b^n}{a+c}+\dfrac{c^n}{a+b} \geqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} s^{n-1}$, а ово је (14).

Стављајући у (14) да је $n=1$, добијамо

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2},$$

а за $n=2$:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant s=\frac{a+b+c}{2},$$

а пошто је ова неједнакост хомогена, можемо узети да је $a+b+c=1$, те имамо

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Узимајући даље $n=3,4,\ldots$, добијамо неједнакости (и овде због хомогености узимамо да је $a+b+c=1$):

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{1}{6}, \qquad \frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{a+c}+\frac{c^4}{a+b} \geqslant \frac{1}{18},$$

итд.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Š. Arslanagić: *O primjeni poznatih nejednakosti*, Triangle, **1**, 1 (1997), 11–24.

[2] Š. Arslanagić: *Anwendungen bekannter Ungleichungen*, Wurzel **12** (1996), 261–270.

[3] Š. Arslanagić: *Nejednakosti za kutove i stranice trokuta*, Matematičko-fizički list **3/191** (1997/98), 136–142.

[4] D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalities*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[5] J. E. Pečarić: *Nejednakosti*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, Mala matematička biblioteka **6**, Element, 1996.