**Др Бранко Савић**

# ФАКТОРИСАЊЕ РАЦИОНАЛНИХ ПОЛИНОМИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА

**1.** Постоји једноставан метод за одређивање рационалних корена полинома са рационалним коефицијентима

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \tag{1}$$

али нема неког једноставног поступка да се одреди један корен који није рационалан када је $n > 4$. Циљ овог рада је да се утврди поступак помоћу кога се могу да одреде ирационални и комплексни корени као нуле квадратног тринома $ax^2 + bx + c$ који учествује у факторизацији полинома (1).

**2.** Тврђење да се полином (1) може представити у облику

$$P_n(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)\cdots(x^2+\beta_r x+\gamma_r), \tag{2}$$

при чему су $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, $\beta_1,\dots,\beta_r$, $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ реални бројеви, може да се допуни чињеницом да у оваквом разлагању неки од коефицијената могу да се оставе и да буду комплексни бројеви, као што је урађено у следећим примерима:

(а) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4 = (x^2 - 2x + 2i)(x^2 - 2x - 2i)$;

(б) $x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 8x + 4 = [x^2 + (2 + i\sqrt{3})x + 2][x^2 + (2 - i\sqrt{3})x + 2]$;

(в) $x^6 + 6x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 4x + 4 = [x^3 + 3x^2 - 2x + (1 + i\sqrt{3})]\times$ $[x^3 + 3x^2 - 2x + (1 - i\sqrt{3})]$;

(г) $x^4 + 1 = [x^2 + \sqrt{2}\,x + 1][x^2 - \sqrt{2}\,x + 1] = [x^2 + i\sqrt{2}\,x - 1][x^2 - i\sqrt{2}\,x - 1] =$ $(x^2 + i)(x^2 - i)$.

На основу (1) и (2) (уз извесне промене ознака) можемо писати

$$\begin{aligned} &x^n + A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \cdots + A_0 \\ &\quad = (x^2 + B_1 x + B_0)(x^r + C_{r-1}x^{r-1} + C_{r-2}x^{r-2} + \cdots + C_0), \quad r + 2 = n. \end{aligned} \tag{3}$$

Изједначавајући коефицијенте уз исте степене $x$-а у (3) добија се систем једначина

$$\begin{aligned} B_0C_0 = A_0, \quad B_0C_1 &= A_1 - B_1C_0, \\ B_0C_2 &= A_2 - B_1C_1 - C_0, \\ B_0C_3 &= A_3 - B_1C_2 - C_1, \\ &\cdots\cdots \\ B_0 &= A_r - B_1C_{r-1} - C_{r-2}, \\ 0 &= A_{r+1} - B_1 - C_{r-1} \end{aligned} \tag{4}$$

за одређивање коефицијената $B_0, B_1, C_0, C_1, \dots, C_{r-1}$.

Према томе, задатак да се одреди полином $P_2(x) = x^2 + B_1x + B_0$ којим је дељив полином $P_n(x) = x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0$, $n > 2$, своди се на решавање система (4).

Приметимо (прва једначина система (4)) да су $B_0$ и $C_0$ фактори (не обавезно целобројни) броја $A_0$. Ако погодно изаберемо пар $(B_0, C_0)$ фактора броја $A_0$, заменом у систем (4) добијамо систем од $(n-1)$ једначине са $(n-2)$ непознате. Ако систем (4) има решење за које важи идентитет (3), полином (1) је факторисан на производ два полинома, од којих је један другог а други $(n-2)$-ог степена.

Нека је дата рационална полиномијална једначина 5. степена

$$x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0. \tag{5}$$

Одговарајући систем (4) за дату једначину је

$$\begin{aligned} B_0C_0 = A_0, \quad B_0C_1 &= A_1 - B_1C_0,\\ B_0C_2 &= A_2 - B_1C_1 - C_0,\\ B_0 &= A_3 - B_1C_2 - C_1,\\ 0 &= A_4 - B_1 - C_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Из последње једначине система је $C_2 = A_4 - B_1$, а из друге $C_1 = \dfrac{1}{B_0}(A_1 - B_1C_0)$, што сменом у трећу једначину даје једначину

$$C_0B_1^2 + (B_0^2 - A_1)B_1 - A_4B_0^2 + A_2B_0 - A_0 = 0, \tag{A}$$

док сменом у четврту једначину система даје једначину

$$B_0B_1^2 + (C_0 - A_4B_0)B_1 + A_3B_0 - A_1 - B_0^2 = 0. \tag{B}$$

Ако једначине $(A)$ и $(B)$, за неки пар вредности $(B_0, C_0)$ за које је $B_0C_0 = A_0$, имају бар једно заједничко решење, тада и систем (6) има бар једно решење $(B_0, B_1, C_0, C_1, C_2)$, па се једначина (5) може представити у облику

$$(x^2 + B_1x + B_0)(x^3 + C_2x^2 + C_1x + C_0) = 0.$$

Пример 1. Факторисати једначину $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 4x - 2 = 0$.

*Решење.* Једначине $(A)$ и $(B)$ за дату једначину су

$$\begin{aligned} C_0B_1^2 + (B_0^2 - 4)B_1 - 2B_0^2 + 7B_0 + 2 &= 0,\\ B_0B_1^2 + (C_0 + 2B_0)B_1 - 5B_0 - B_0^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Целобројни фактори броја $A_0 = -2$ су: $\pm 1$, $\pm 2$, а одговарајући парови целих бројева $(B_0, C_0)$ за које је $B_0C_0 = -2$ су: $(-1, 2)$, $(1, -2)$, $(-2, 1)$, $(2, -1)$. За $B_0 = -2$, $C_0 = 1$ једначине $(A)$ и $(B)$ гласе

$$B_1^2 - 4 = 0, \qquad 2B_1^2 + 3B_1 - 2 = 0,$$

и имају заједничко решење $B_1 = -2$, а одговарајући систем је

$$\begin{aligned}(-2)\cdot 1 = -2, \quad -2C_1 &= 4 - B_1,\\ -2C_2 &= 7 - B_1C_1 - 1,\\ -2 &= -5 - B_1C_2 - C_1,\\ 0 &= -2 - B_1C_3 - C_2,\end{aligned}$$

одакле се за $B_1 = -2$ добија да је $C_1 = -3$, $C_2 = 0$ и важи једнакост (3) у облику

$$x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 4x - 2 = (x^2 - 2x - 2)(x^3 - 3x + 1).$$

Тиме су одређена и два (ирационална) корена $1 \pm \sqrt{3}$ дате једначине.

Једначине аналогне једначинама $(A)$ и $(B)$ могу се формирати и за једначине степена 6, 7, итд.

Пример 2. Факторисати једначину $x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x + 2 = 0$.

*Решење.* Систем (4) за дату једначину гласи

$$\begin{aligned}B_0C_0 = 2, \quad B_0C_1 &= -2 - B_1C_0,\\ B_0C_2 &= -B_1C_1 - C_0,\\ B_0C_3 &= 2 - B_1C_2 - C_1,\\ B_0 &= -1 - B_1C_3 - C_2,\\ 0 &= -1 - B_1 - C_3.\end{aligned}$$

Целобројни фактори слободног члана $A_0 = 2$ су: $\pm 1$, $\pm 2$, а одговарајући парови бројева $(B_0, C_0)$ су: $(-1,-2)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$, $(2,1)$. За $(B_0, C_0) = (1,2)$ једначине аналогне једначинама $(A)$ и $(B)$ су:

$$B_1^2 + B_1 = 0, \qquad B_1^3 + B_1^2 - 5B_1 - 5 = 0,$$

њихово заједничко решење је $B_1 = -1$, а решење система:

$$B_0 = 1,\ \ B_1 = -1,\ \ C_0 = 2,\ \ C_1 = 0,\ \ C_2 = -2,\ \ C_3 = 0$$

и важи једнакост

$$x^6 - x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x + 2 = (x^2 - x + 1)(x^4 - 2x^2 + 2).$$

Два (комплексна) решења дате једначине су $\dfrac{1}{2} \pm i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 3. Факторисати једначину $2x^5 + x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 9x + 4 = 0$.

*Решење.* Ако обе стране једначине поделимо са 2 (што не мења њене корене), добићемо једначину

$$x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0.$$

Неки од парова бројева $(B_0, C_0)$ за које је $B_0C_0 = \frac{4}{2}$ су: $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $\left(4, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$, $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$. За $B_0 = -4$, $C_0 = -\frac{1}{2}$, из једначине $(A)$ имамо једначину

$$B_1^2 - 41B_1 + 40 = 0$$

чија су решења $B_1 = 1$ и $B_1' = 40$, а решење система (4) за дату једначину је

$$B_0 = -4,\ \ B_1 = 1,\ \ C_0 = -\frac{1}{2},\ \ C_1 = 1,\ \ C_2 = -\frac{1}{2}$$

и важи једнакост

$$x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = (x^2 + x - 4)\left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}\right),$$

односно једнакост

$$2x^5 + x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 9x + 4 = (x^2 + x - 4)(2x^3 - x^2 + 2x - 1).$$

Пример 4. Факторисати једначину $x^4 - 2x^2 - 2 = 0$.

*Решење.* Систем (4) за дату једначину гласи

$$\begin{aligned} B_0C_0 = -2, \qquad B_0C_1 &= -B_1C_0, \\ B_0 &= -2 - B_1C_1 - C_0, \\ 0 &= -B_1 - C_1. \end{aligned}$$

Нема рационалних бројева $B_0$ и $C_0$ за које систем има решење. Како је $(a + \sqrt{a^2+2})(a - \sqrt{a^2+2}) = -2$, то треба узети $B_0 = a + \sqrt{a^2+2}$, $C_0 = a - \sqrt{a^2+2}$ (или обрнуто) и на основу једнакости (3) одредити константу $a$. Из последње једначине система је $C_1 = -B_1$, а из претпоследње је $B_0 + C_0 = B_1^2 - 2$. Како је $B_0 + C_0 = 2a$, то је $B_1^2 - 2 - 2a = 0$, а одатле $B_1 = \pm\sqrt{2+2a}$. За $B_1 = \sqrt{2+2a}$ једнакост (3) гласи

$$x^4 - 2x^2 - 2 = (x^2 + \sqrt{2+2a}\,x + a + \sqrt{a^2+2})(x^2 - \sqrt{2+2a}\,x + a - \sqrt{a^2+2}).$$

Изједначавањем коефицијената уз исте степене промењливе у овој једнакости добија се једнакост

$$(a + \sqrt{a^2+2})\sqrt{2+2a} - (a - \sqrt{a^2+2})\sqrt{2+2a} = 0$$

која је тачна за $a = -1$ или $a = i\sqrt{2}$. За $a = -1$ је $B_1 = 0$, $B_0 = -1 + \sqrt{3}$, $C_0 = -1 - \sqrt{3}$, па важи једнакост

$$x^4 - 2x^2 - 2 = [x^2 + (-1 + \sqrt{3})][x^2 + (-1 - \sqrt{3})].$$

Пример 5. Факторисати једначину $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4 = 0$.

*Решење.* Нема реалних бројева $B_0$ и $C_0$ за које систем

$$\begin{aligned} B_0C_0 = 4, \qquad B_0C_1 &= -B_1C_0, \\ B_0 &= 4 - B_1C_1 - C_0, \\ 0 &= -4 - B_1 - C_1. \end{aligned}$$

има решење. Како је $(a + i\sqrt{4-a^2})(a - i\sqrt{4-a^2}) = 4$, то поступајући као у претходном примеру налазимо да је $a = 0$, па је $B_0 = 2i$, $C_0 = -2i$ (или обрнуто), а решење система је: $B_0 = -2i$, $B_1 = -2$, $C_0 = 2i$, $C_1 = -2$ и важи једнакост

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4 = (x^2 - 2x - 2i)(x^2 - 2x + 2i).$$

Пример 6. Факторисати једначину $x^4 + 1 = 0$.

*Решење.* У овом случају систем (4) има решење за:

(а) $(B_0, C_0) = (1, 1)$; оно је $B_1 = \pm\sqrt{2}$, $C_1 = \mp\sqrt{2}$ и важи једнакост

$$x^4 + 1 = (x^2 + i\sqrt{2}\,x - 1)(x^2 - i\sqrt{2}\,x - 1).$$

(б) $(B_0, C_0) = (-1, -1)$ када важи једнакост

$$x^4 + 1 = (x^2 + i\sqrt{2}\,x + 1)(x^2 - i\sqrt{2}\,x + 1).$$

(в) $(B_0, C_0) = (i, -i)$, када је $B_1 = C_1 = 0$ и важи једнакост

$$x^4 + 1 = (x^2 + i)(x^2 - i).$$