Драгољуб С. Јовић

О КОЦИКЛИЧНОЈ ЧЕТВОРКИ ТАЧАКА

По дефиницији, за три и више различитих тачака равни E^2 кажемо да су *колинеарне* ако припадају истој правој те исте равни E^2.

Такође, по дефиницији, за три и више различитих тачака равни E^2 кажемо да су *коцикличне* ако припадају истом кругу те исте равни E^2. Отуда непосредно произлази да ма које три коцикличне тачке нису колинеарне.

Будући да су темена сваког троугла три неколинеарне тачке и да се око сваког троугла може описати (конструисати) само један круг (са центром у пресеку симетрала његових страница), следи да су темена троугла три коцикличне тачке и да је круг одређен са три неколинеарне тачке.

Наводимо прво два позната тврђења о коцикличним четворкама тачака.

Теорема 1. *Четворка различитих тачака (A, B, C, D) равни E^2, од којих ма које три нису колинеарне, јесте коциклична ако и само ако је*

$$\angle ACB = \angle ADB \quad \text{или} \quad \angle ACB + \angle ADB = 180^\circ. \tag{1}$$

Теорема 2. *Четворка различитих тачака (A, B, C, D) равни E^2, од којих ма које три нису колинеарне, јесте коциклична ако и само ако је*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD, \tag{2}$$

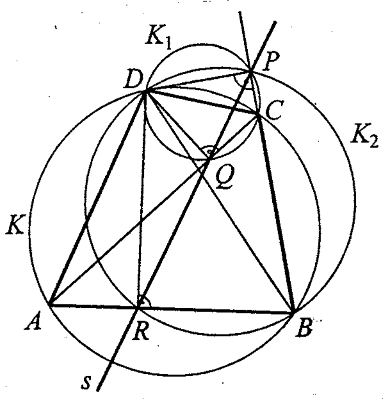
где је P тачка у којој се секу праве AB и CD.

Теорема 3. *Четворка различитих тачака (A, B, C, D) равни E^2, од којих ма које три нису колинеарне, јесте коциклична ако и само ако ортогоналне пројекције P, Q и R тачке D на праве одређене страницама BC, CA и AB троугла ABC припадају истој правој s.*

Ову теорему први је формулисао и доказао шкотски математичар Симсон (R. Simson, 1687–1768), па се по њему зове *Симсонова теорема*, а права s којој припадају тачке P, Q и R зове се *Симсонова права тачке D у односу на троугао ABC*.

Доказ.

Услов теореме је потребан. Нека је (A, B, C, D) коциклична четворка различитих тачака, уређена, на пример, у смеру који је супротан кретању казаљке на сату, и нека су P, Q и R ортогоналне пројекције тачке D на праве одређене страницама BC, CA и AB троугла ABC, сл. 1. Треба доказати да су тачке P, Q и R колинеарне, тј. да припадају истој правој.



Сл. 1

Заиста, нека је K круг коме припадају тачке A, B, C, D. Како је $\angle CPD = \angle CQD = \angle BRD = 90°$, то је

$$\angle CPD + \angle CQD = 180°,$$
$$\angle BRD + \angle BPD = 180°,$$

одакле на основу теореме 1 следи да су (C, P, D, Q) и $(B.P, D, R)$ коцикличне четворке тачака. То значи да постоје кругови K_1 и K_2 којима редом припадају ове четворке тачака. На основу теореме 1, а према слици 1, произлази да је

$$\angle DPQ = \angle DCQ = \angle DCA = \angle DBA = \angle DBR = \angle DPR,$$

тј. $\angle DPQ = \angle DPR$. То значи да тачке P, Q и R припадају истој правој, што је и требало доказати.

2) *Услов теореме је довољан.* Нека је (A, B, C, D) четворка различитих тачака, таква да ма које три од њих нису колинеарне, и нека ортогоналне пројекције P, Q и R тачке D на праве одређене страницама BC, CA и AB троугла ABC припадају истој правој s, сл. 1. Треба доказати да су тачке A, B, C, D коцикличне.

Како је $\angle CPD = \angle CQD = \angle BRD = 90°$, то је

$$\angle CPD + \angle CQD = 180°,$$
$$\angle BRD + \angle BPD = 180°,$$

одакле, на основу теореме 1, произлази да су (C, P, D, Q) и (B, P, D, R) коцикличне четворке тачака. То значи да постоје кругови K_1 и K_2 којима редом припадају ове четворке тачака. С друге стране, како тачке P, Q и R припадају истој правој s и како су у истом кругу периферијски углови над истим луком једнаки, биће

$$\angle ABD = \angle RBD = \angle RPD = \angle QPD = \angle QCD = \angle ACD,$$

тј. $\angle ABD = \angle ACD$, одакле на основу теореме 1 произлази да су тачке A, B, C и D коцикличне.

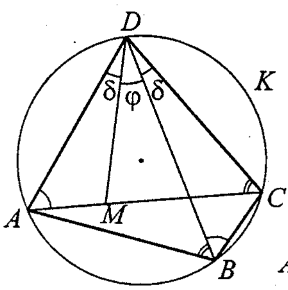
Тиме је теорема у потпуности доказана. ■

Теорема 4. *Четворка различитих тачака* (A, B, C, D) *у равни* E^2, *од којих ма које три нису колинеарне, јесте коциклична ако и само ако је*

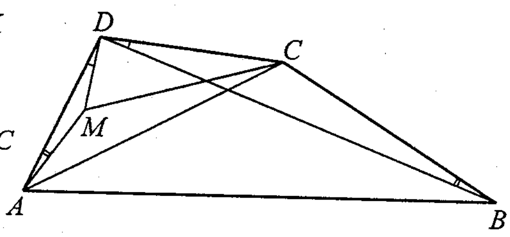
$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC. \tag{3}$$

Ову теорему је први формулисао и доказао грчки астроном, географ и математичар Птолемеј (Клаудиос Птолемаиос, око 83--око 161. н.е.), па се по њему зове и *Птолемејева теорема.*

Даћемо два доказа ове теореме.



Сл. 2



Сл. 3

Доказ 1.

1) *Услов теореме је потребан.* Нека је (A, B, C, D) коциклична четворка различитих тачака, уређена, на пример, у смеру који је супротан кретању казаљке на сату, тј. нека тачке A, B, C и D у овом поретку припадају истом кругу K, сл. 2. Треба доказати једнакост (3).

У том циљу конструишимо $\angle ADM = \angle BDC = \delta$, а угао BDM означимо са φ, при чему је M тачка праве AC. Како је при том $\angle DAM = \angle DBC$, као периферијски углови над истим луком CD, биће $\triangle ADM \sim \triangle BDC$, па је стога $AD : DM = BD : DC$, тј.

$$AM \cdot BD = AD \cdot BC. \tag{4}$$

С друге стране, како је $\angle ABD = \angle ACD$ (као периферијски углови над истим луком AD) и $\angle ADB = \angle CDM = \delta \pm \varphi$ (зависно од распореда), биће $\triangle ABD \sim \triangle MCD$, па је стога $AB : BD = MC : CD$, тј.

$$MC \cdot BD = AB \cdot CD. \tag{5}$$

Саберемо ли једнакости (4) и (5), добијамо да је $(AM + MC) \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$, тј.

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

што је и требало доказати.

2) *Услов теореме је довољан.* Нека је (A, B, C, D) четворка различитих тачака, таква да ма које три од њих нису колинеарне, и нека при том важи једнакост (3). Треба доказати да су A, B, C и D коцикличне тачке.

У том циљу у четвороуглу $ABCD$ који је одређен датим тачкама конструишимо праве DM и AM тако да је $\angle CDB = \angle ADM$ и $\angle CBD = \angle DAM$, сл. 3. Тада је $\triangle AMD \sim \triangle BCD$, па следи да је $AM : AD = BC : BD$ и $DM : AD = CD : BD$, одакле, пак, непосредно произлази да је

$$AM = \frac{AD \cdot BC}{BD}, \tag{6}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{DM}{CD}. \tag{7}$$

Међутим, како је $\angle ADB = \angle MDC$ (јер је по конструкцији $\angle ADM = \angle CDB$), то из (7) следи да је $\triangle ABD \sim \triangle MCD$, па је стога

$$MC = \frac{AB \cdot CD}{BD}. \tag{8}$$

Но, према релацији троугла је $AM + MC \geqslant AC$, одакле385 заменом из једнакости (6) и (8) добијамо $\dfrac{AD \cdot BC}{BD} + \dfrac{AB \cdot CD}{BD} \geqslant AC$, тј.

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + AD \cdot BC. \tag{9}$$

Према учињеној претпоставци (3), у претходној неједнакости (9) уствари важи једнакост. Но, то је могуће само у случају када тачка M припада дијагонали AC датог четвороугла $ABCD$. У том случају је $\angle DAC = \angle DAM = \angle CBD$, па се у троугловима ACD и BCD наспрам заједничке странице CD налазе једнаки углови, што значи да тачке A и B припадају кругу у коме је дуж CD једна тетива.

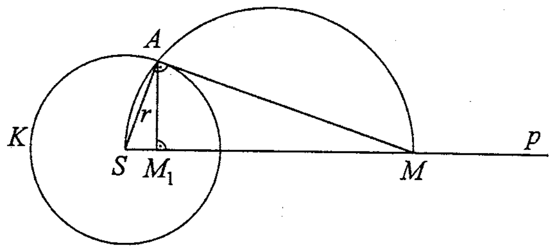
Дакле, ако важи једнакост (3), онда су тачке A, B, C и D коцикличне, што је и требало доказати. ∎

Доказ 2.

Релацију (3) можемо доказати и применом инверзије у односу на круг. Стога најпре дефинишимо ту геометријску трансформацију, а потом докажимо она њена својства која ће нам бити потребна ради доказа релације (3).

Дефиниција. Нека је $K(S, r)$ произвољан круг равни E^2, а $E^2_\bullet = E^2 \setminus \{S\}$. *Инверзијом у односу на круг* $K(S, r)$ називамо трансформацију $\Psi_K \colon E^2_\bullet \to E^2_\bullet$ која тачку $M \in E^2_\bullet$ пресликава у тачку $M_1 \in E^2_\bullet$, такву да су тачке S, M и M_1 колинеарне, вектори $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SM_1}$ истосмерни и да је $SM \cdot SM_1 = r^2$. Тачку S називамо *центром* (*средиштем*) инверзије, дуж r називамо *полупречником* инверзије, број r^2 називамо *степеном* инверзије, а круг $K(S, r)$ називамо *кругом* инверзије.

Непосредно из ове дефиниције произлази да је инверзија у односу на круг $K(S, r)$ равни $E^2_\bullet$ бијективна трансформација те равни. То није трансформација



Сл. 4

целе равни, већ само њеног дела $E^2_\bullet$, јер у њој није дефинисана слика тачке S, нити је тачка S слика неке тачке равни E^2.

Да бисмо конструисали пар кореспондентних тачака инверзије у односу на дати круг $K(S,r)$, узмимо најпре да је тачка M ван круга K (сл. 4). Затим над дужи SM као над пречником конструишимо полукруг. Нека тај полукруг сече дати круг K у тачки A. Како је периферијски угао над пречником прав, следи да је троугао SMA правоугли са правим углом у темену A. Конструишемо ли из тачке A нормалу AM_1 на хипотенузу SM, онда на основу Еуклидове теореме следи да је

$$SM \cdot SM_1 = SA^2 = r^2.$$

То значи да је тачка M_1 у датој инверзији Ψ_K лик тачке M.

Ако је дата тачка M_1 унутар круга K (различита од центра круга S), онда њен лик M конструишемо тако што, најпре, у тачки M_1 конструишемо нормалу на SM_1. Затим, у пресеку A те нормале са датим кругом K конструишемо тангенту на круг. Пресек те тангенте са правом SM_1 је лик M тачке M_1 у датој инверзији Ψ_K, поново на основу Еуклидове теореме.

На основу претходног произлазе следеће три констатације:

1. све тачке спољашње области круга $K(S,r)$ инверзијом Ψ_K пресликавају се у тачке унутрашње области круга K;
2. све тачке унутрашње области круга K инверзијом Ψ_K пресликавају се у тачке спољашње области круга K;
3. тачке круга K *инваријантне* су у инверзији Ψ_K, јер ако је A произвољна тачка тог круга, биће $SA \cdot SA = r^2$.

Следећим трима лемама доказаћемо она својства инверзије у односу на круг која ће нам бити потребна ради доказивања релације (3).

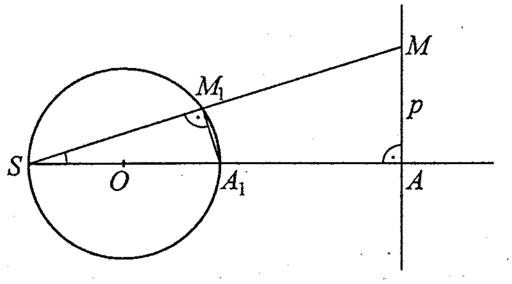
Лема 1. *Ако је $K(S,r)$ произвољан круг равни E^2, а p права те равни којој припада средиште S датог круга, онда је $\Psi_K(p \setminus \{S\}) = p \setminus \{S\}$.*

Другим речима, права којој припада средиште инверзије пресликава се том инверзијом на саму себе. Ово тврђење следи непосредно из напред описане конструкције узајамно кореспондентних тачака у датој инверзији.

Приметимо да је, према овој леми, свака права p која садржи центар инверзије инваријантна (непокретна) при тој инверзији, али да тачке те праве при том нису инваријантне, јер је $\Psi_K(M) = M_1 \neq M$ (изузетак је тачка пресека круга K и праве p).

Лема 2. *Ако је $K(S,r)$ произвољан круг равни E^2, а p права те равни којој не припада средиште S датог круга, онда лик $\Psi_K(p)$ представља круг коме недостаје тачка S.*

Другим речима, права којој не припада центар инверзије пресликава се том инверзијом на круг коме недостаје центар инверзије.



Сл. 5

Доказ. Из тачке S конструишимо праву $q \perp p$ (сл. 5). Ако је при том $q \cap p = \{A\}$, а $\Psi_K(A) = A_1$, онда на основу претходне леме следи да је

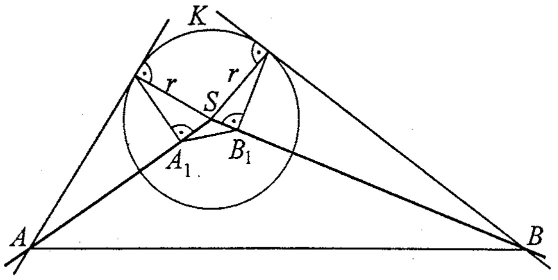
$$A_1 \in q, \quad \Psi_K(q \setminus \{S\}) = q \setminus \{S\} \quad \text{и} \quad SA \cdot SA_1 = r^2.$$

Уочимо сад на правој p тачку M, различиту од тачке A. Ако је $\Psi_K(M) = M_1$, онда су на основу дефиниције тачке S, M и M_1 колинеарне и важи $SM \cdot SM_1 = r^2$. Дакле, $SA \cdot SA_1 = SM \cdot SM_1 = r^2$, па је $SA : SM = SM_1 : SA_1$. То значи да су у троугловима SAM и SM_1A_1 странице, које образују њихов заједнички угао са теменом у тачки S, пропорционалне, па је стога $\triangle SAM \sim \triangle SM_1A_1$. Одатле следи да је $\angle SAM = \angle SM_1A_1 = 90^\circ$. То значи да тачка M_1 припада кругу K_1 чији је пречник дуж SA_1, али је различита од тачака S и A_1.

Обрнуто, ако је M_1 тачка круга K_1, различита од тачака S и A_1, онда је $\angle M_1SA_1$ оштар (као унутрашњи угао правоуглог троугла SA_1M_1), па стога права p која је нормална на краку $SA_1 = q$ тог угла мора сећи његов други крак SM_1 у некој тачки M. При томе је $\angle MSA = \angle A_1SM_1$ и $\angle SAM = \angle SM_1A_1 = 90^\circ$, па је зато $\triangle SAM \sim \triangle SM_1A_1$, одакле пак непосредно произлази да је $SA_1 : SM_1 = SM : SA$, тј. $SM_1 \cdot SM = SA_1 \cdot SA = r^2$, при чему су тачке S, M и M_1 колинеарне. По дефиницији, то значи да је $\Psi_K(M) = M_1$. Тиме је доказано да је слика праве p инверзијом Ψ_K круг K_1 без тачке S. ■

Лема 3. *Ако је Ψ_K инверзија равни E^2 у односу на круг $K(S,r)$ и ако у тој инверзији тачкама A и B, које су различите од центра S датог круга, респективно одговарају тачке A_1 и B_1, онда је*

$$A_1B_1 = \frac{r^2}{SA \cdot SB} AB.$$



Сл. 6

Доказ. Према претпоставци је $\Psi_K(A) = A_1$ и $\Psi_K(B) = B_1$, па су тачке S, A и A_1, као и S, B и B_1, колинеарне (сл. 6), и важи

$$SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1 = r^2.$$

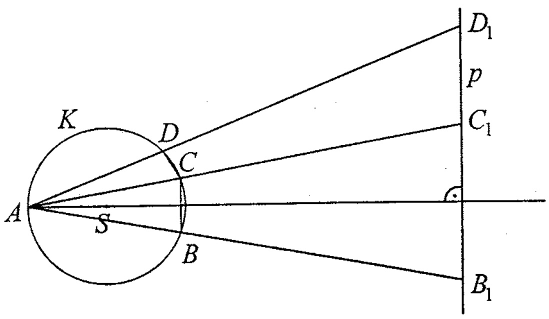
Одатле следи да је $SA : SB = SB_1 : SA_1$, што значи да су у троугловима SAB и SB_1A_1 странице, које образују њихов заједнички угао са теменом у тачки S, пропорционалне, па је зато $\triangle SAB \sim \triangle SB_1A_1$. Одатле произлази да је $A_1B_1 : SB_1 = AB : SA$, односно

$$A_1B_1 = \frac{SB_1}{SA}\, AB = \frac{r^2}{SA \cdot SB}\, AB,$$

што је требало доказати. ■

Докажимо сада применом инверзије Птолемејеву теорему 4.

1) *Услов теореме је потребан.* Нека је (A, B, C, D) коциклична четворка различитих тачака, уређена, на пример, у смеру који је супротан кретању казаљке на сату, тј. нека тачке A, B, C и D у овом поретку припадају истом кругу $K(S, r)$ равни E^2 (сл. 7). Треба доказати једнакост (3).



Сл. 7

Узмимо теме A датог тетивног четвороугла $ABCD$ за центар неке инверзије Ψ. Према леми 2, круг $K(S,r)$ из кога је изостављен центар A инверзије Ψ пресликава се том инверзијом на праву $p \perp AS$. Ако је при томе $\Psi(B) = B_1$, $\Psi(C) = C_1$ и $\Psi(D) = D_1$, онда тачке B_1, C_1 и D_1 припадају правој p и тачка C_1 је између тачака B_1 и D_1, па је стога

$$B_1C_1 + C_1D_1 = B_1D_1. \tag{10}$$

Међутим, како је, према леми 3,

$$B_1C_1 = \frac{\rho^2}{AB \cdot AC}\,BC, \quad C_1D_1 = \frac{\rho^2}{AC \cdot AD}\,CD \quad \text{и} \quad B_1D_1 = \frac{\rho^2}{AB \cdot AD}\,BD,$$

где је ρ полупречник инверзије Ψ, једнакост (10) постаје

$$\frac{\rho^2}{AB \cdot AC}\,BC + \frac{\rho^2}{AC \cdot AD}\,CD = \frac{\rho^2}{AB \cdot AD}\,BD,$$

одакле сређивањем добијамо да је $AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$, што је и требало доказати.

2) *Услов теореме је довољан.* Нека је (A,B,C,D) четворка различитих тачака, таква да ма које три од њих нису колинеарне, и нека при томе важи једнакост (3). Треба доказати да су A, B, C и D коцикличне тачке.

Ако теме A четвороугла $ABCD$ узмемо за центар неке инверзије Ψ и ако је у тој инверзији $\Psi(B) = B_1$, $\Psi(C) = C_1$ и $\Psi(D) = D_1$, онда на основу леме 3 следи да је

$$B_1C_1 = \frac{\rho^2}{AB \cdot AC}\,BC, \quad C_1D_1 = \frac{\rho^2}{AC \cdot AD}\,CD \quad \text{и} \quad B_1D_1 = \frac{\rho^2}{AB \cdot AD}\,BD,$$

где је ρ полупречник инверзије Ψ. Помножимо ли једнакост (3) са $\dfrac{\rho^2}{AB \cdot AC \cdot AD}$, добијамо да је

$$\frac{\rho^2}{AB \cdot AC}\,BC + \frac{\rho^2}{AC \cdot AD}\,CD = \frac{\rho^2}{AB \cdot AD}\,BD,$$

одакле, на основу претходних релација за B_1C_1, C_1D_1 и B_1D_1 непосредно произлази да је $B_1C_1 + C_1D_1 = B_1D_2$. Но, ова једнакост важи једино у случају да су тачке B_1, C_1 и D_1 колинеарне, при чему је тачка C_1 између B_1 и D_1. На основу леме 2 произлази да њима инверзне тачке B, C и D припадају неком кругу K који садржи тачку A.

Тиме је теорема у потпуности доказана. ■