Радојко Дамјановић

ДУПЛИРАЊЕМ И ПРЕМЕШТАЊЕМ ДО РЕШЕЊА

Читалац би, судећи по наслову, помислио да чланак говори о неким комбинаторним решењима из методике усвајања почетних математичких појмова. Такође, могао би помислити да је реч о неким решењима проблема за ученике млађих разреда, али никако да је реч о једној геометријској трансформацији, и то транслацији – паралелном преносу.

Пажљивији, или боље рећи (јер је у питању математика) прецизнији читалац побуниће се због оваквог терминолошког сублимата, али мишљења сам да не би било лоше ученицима понекад и уз званичан, научно верификован термин дати и назив који на још неки начин квалификује, или боље, који им решење неког проблема још више приближава свести. То бисмо могли да назовемо уступком свима онима који данас заговарају интерактивни/активни приступ решавању проблема.

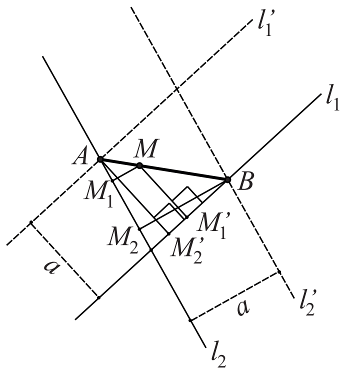
Геометријске трансформације су готово искључене из програма за основну школу. Изучавајући ову област, наишао сам на занимљив задатак (у књизи И. М. Яглом-а, „Геометрические преобразования", Москва, 1955) који бих желео да презентујем математичкој јавности. Иначе, сам наслов је произашао док сам спремао цртеже уз решење, када сам више пута користио наредбе `copy-paste` (дуплирање) и уз помоћ миша маркирао извесне геометријске објекте и премештао их (премештање) са једне на другу позицију.

Некима од својих напреднијих ученика седмог разреда већ сам излагао или давао на читање неке од задатака из ове области. Реаговали су тако да су транслацију повезали са транслаторним кретањем у физици. Мој први осећај био је мешавина чуђења и неверице, јер сам сматрао да општи – први (теоријски) део читаве приче припада математици и да ми математичари полажемо право на њен почетак. Међутим, сада сопствену недоумицу идентификујем, или могу да сведем на питање: „шта је старије, кокошка или јаје?"

Задатак. *(а) Наћи геометријско место тачака M у равни, таквих да им је збир одстојања од две дате праве l_1 и l_2 те равни једнак датој дужи a.*

(б) Наћи геометријско место тачака M у равни, таквих да им је разлика (по апсолутној вредности) одстојања од две дате праве l_1 и l_2 те равни једнака датој дужи a.

Решење. (а) Претпоставимо најпре да се дате праве l_1 и l_2 секу у некој тачки O, и нека су l_1' и l_2' праве конструисане на задатом растојању a, паралелно правим l_1 и l_2, респективно (сл. 1).



Сл. 1

Права l_2 у пресеку са правом l_1' даје тачку A, чије је одстојање од праве l_2 једнако нули, а од праве l_1 датој дужи a; према томе, можемо да закључимо да је збир њених растојања од датих правих једнак датој дужи a. Аналогно важи за тачку $B = l_1 \cap l_2'$.

Докажимо сада да било која тачка M дужи AB такође испуњава услов да је збир њених одстојања x и y од правих l_1 и l_2, редом, једнак датој дужи a, тј. да је $x + y = a$.

Нека су тачке M_1 и M_2 подножја нормала конструисаних из тачака M и B на праву l_2, чије су дужине редом y и a. Слично, нека су тачке M_1' и M_2' подножја нормала конструисаних из тачака M и A на праву l_1, чије су дужине редом x и a. Посматрајмо троуглове $\triangle AMM_1$ и $\triangle ABM_2$. Можемо да закључимо да је $\angle M_1AM = \angle M_2AB$ (заједнички угао) и $\angle MM_1A = \angle BM_2A = 90°$, одакле следи да је $\triangle AMM_1 \sim \triangle ABM_2$. Из претходног имамо да је $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MM_1}{BM_2} = \dfrac{y}{a}$, тј.

$$y = \frac{AM}{AB}\, a. \tag{1}$$

Аналогно се показује да је $\triangle BMM_1' \sim \triangle BAM_2'$, одакле је $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{MM_1'}{AM_2'} = \dfrac{x}{a}$, тј.

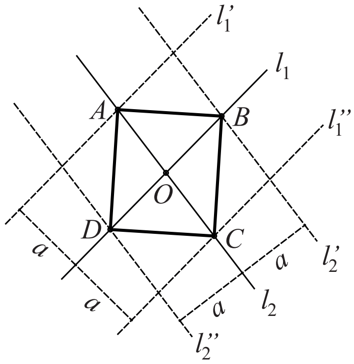
$$x = \frac{BM}{BA}\, a. \tag{2}$$

Из једнакости (1) и (2) следи да је

$$x + y = \frac{BM}{BA}\, a + \frac{AM}{AB}\, a = \frac{BM + AM}{AB}\, a = a,$$

што је и требало доказати.

Уочимо дуж CD, централно-симетричну са AB у односу на тачку O. Тачка C је пресек праве l_2 са правом l_1'', симетричном са l_1' у односу на l_1, а слично важи и за тачку D, сл. 2. Зато се аргумент спроведен за тачке дужи AB може поновити за тачке сваке од дужи BC, CD и DA. На тај начин, свака тачка изломљене линије $ABCD$ задовољава услове задатка (та изломљена линија је уствари правоугаона линија, што се лако показује).



Сл. 2

Читаоцу препуштамо да покаже да и обратно, свака тачка равни одређене правим l_1 и l_2, која задовољава услов да јој је збир одстојања од правих l_1 и l_2 једнак датој дужи a, припада правоугаоној линији $ABCD$, тј. да је *тражено геометријско место тачака правоугаона линија* $ABCD$.

У случају да су праве l_1 и l_2 паралелне, разликујемо следеће три ситуације.

1° Када је растојање између правих веће од дате дужи a, тада задатак нема решења.

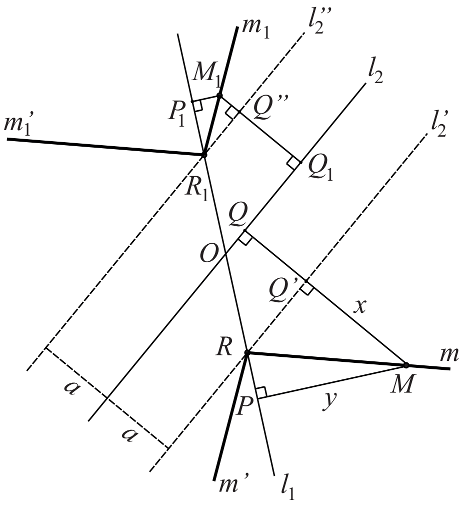
2° Када је растојање између правих једнако датој дужи a, онда је тражено геометријско место тачака део равни ограничен правим l_1 и l_2, укључујући и ове две праве.

3° Када је растојање d између правих мање од дате дужи a, онда решење чине две паралелне праве које се налазе ван области равни ограничене правим l_1 и l_2 на растојању $\dfrac{a-d}{2}$, једна са једне, а друга са друге стране наведене области.

(б) Нека су у равни задате праве l_1 и l_2 које се секу у тачки O, сл. 3.

Нека су праве l_2' и l_2'' добијене паралелним преносом праве l_2 за дату дуж a у оба смера, и нека су R и R_1 пресеци праве l_1 са правим l_2' и l_2'', редом. Нека су, даље, Rm, Rm', R_1m_1 и R_1m_1' бисектрисе углова које гради права l_1 са правим l_2' и l_2'', а који леже у делу равни изван области ограничене правим l_2' и l_2''. Покажимо да свака тачка било које од тих бисектриса задовољава задати услов да јој је разлика (по апсолутној вредности) одстојања од правих l_1 и l_2 једнака датој дужи a.

Учинићемо то за произвољну тачку $M \in Rm$ – јасно је да се аналогно доказује да тврђење важи за тачке са осталих бисектриса (нпр. за тачку $M_1 \in R_1m_1$).



Сл. 3

Нека су x и y одстојања тачке M од правих l_2 и l_1, редом. Нека су P и Q подножја нормала из тачке M на праве l_1 и l_2, а $Q' = MQ \cap l_2'$. Посматрајмо троуглове $\triangle MQ'R$ и $\triangle MPR$. Можемо да уочимо да је $\angle MQ'R = \angle MPR = 90°$, $\angle Q'RM = \angle PRM$ (јер је RM бисектриса угла $\angle Q'RP$) и $RM = RM$ (заједничка страница). Зато је $\triangle MQ'R \cong \triangle MPR$, па је $MQ' = MP$. Најзад,

$$x - y = MQ - MP = MQ - MQ' = Q'Q = a,$$

што је и требало доказати.

Аналогно претходном, ако конструишемо праве l_1' и l_1'', паралелним преносом праве l_1 за дату дуж a, са једне и друге њене стране, добијамо још четири бисектрисе чије тачке такође имају наведену особину. На тај начин, постоји укупно осам бисектриса које испуњавају постављени услов. Поново препуштамо читаоцу да покаже да свака тачка равни која задовољава поменути услов мора да припада једној од наведених осам бисектриса, тј. *тражено геометријско место тачака је унија осам описаних бисектриса.*

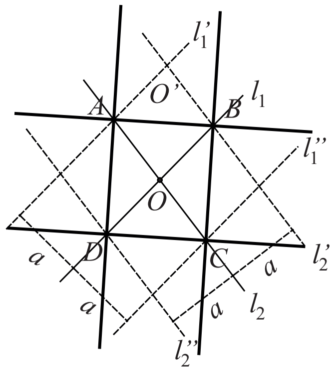
Коначно, уколико желимо да се осврнемо још једном на читав задатак и да га представимо на једном цртежу, то би изгледало као на сл. 4.

Коментар 1. Уколико бисмо другачије формулисали, задатак би био знатно лакши, а самим тим употребљив за наставу у средњој школи.

Дате су две праве l_1 и l_2 које се секу; ако паралелно са правом l_1 (са обе њене стране) конструишемо праве l_1' и l_1'' на растојању једнаком датој дужи a и, исто тако, паралелно са правом l_2 конструишемо праве l_2' и l_2'' на растојању једнаком датој дужи a, доказати:

(а) да је четвороугао $ABCD$ правоугаоник, при чему је $\{A\} = l_2 \cap l_1'$, $\{B\} = l_1 \cap l_2'$, $\{C\} = l_2 \cap l_1''$ и $\{D\} = l_1 \cap l_2''$ (као на сл. 4);

(б) да је збир одстојања сваке тачке правоугаоне линије $ABCD$ од правих l_1 и l_2 једнак датој дужи a;



Сл. 4

(в) да је разлика (по апсолутној вредности) одстојања сваке тачке са било којег од продужетака страница правоугаоника $ABCD$ преко темена, до правих l_1 и l_2 једнака датој дужи a.

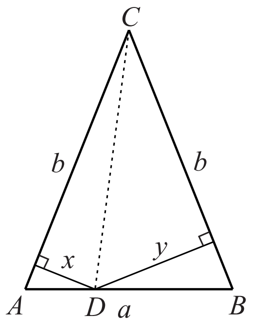
Коментар 2. Као уводни могао би се урадити следећи задатак.

Збир одстојања било које тачке са основице једнакокраког троугла од кракова је сталан и једнак је висини која одговара краку.

Решење. Како је површина посматраног једнакокраког троугла (сл. 5) једнака $\frac{1}{2}bh_b$, а исто тако једнака збиру вредности $\frac{1}{2}bx$ и $\frac{1}{2}by$, као збиру површина троуглова на који је он растављен помоћу дужи CD, то је

$$\frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bx + \frac{1}{2}by = \frac{1}{2}b(x+y),$$

одакле следи да је $x + y = h_b$, што је и требало показати.



Сл. 5