Мр Љубинка Петковић

РЕКУРЕНТНЕ ФОРМУЛЕ У ВЕРОВАТНОЋИ

У теорији вероватноће код многих задатака се појављују изрази које није лако упростити. На пример, код задатака са применом формуле потпуне вероватноће јављају се суме које се тешко израчунавају. Међутим, применом рекурентних формула такви проблеми се много лакше решавају. Размотрићемо неколико интересантних примера који то илуструју.

Пример 1. Наћи вероватноћу да у n бацања хомогеног новчића број писама буде паран.

Решење. С обзиром да је новчић хомоген, вероватноћа појављивања писма у сваком бацању је $p(\Pi) = 0{,}5$. Означимо са $p_{n,2k}$ вероватноћу да се у n бацања писмо појави $2k$ пута ($0 \leqslant 2k \leqslant n$, $k, n \in \mathbf{N}$). Тада је вероватноћа P_1 да се у n бацања новчића писмо појави паран број пута једнака

$$\begin{aligned} P_1 &= p_{n,0} + p_{n,2} + \cdots + p_{n,2k_1}, \quad 2k_1 = \begin{cases} n, & \text{ако је } n \text{ парно}, \\ n-1, & \text{ако је } n \text{ непарно}, \end{cases} \\ &= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{2k_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2k_1} \\ &= \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k_1}\right]. \end{aligned} \tag{1}$$

Израчунавање добијене суме је овде могуће коришћењем биномног обрасца који даје:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n,$$
$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0.$$

Одатле добијамо да је збир коефицијената у развоју степена бинома на парним местима једнак збиру коефицијената на непарним местима,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots = 2^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Дакле и $P_1 = \dfrac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \dfrac{1}{2}$, за свако $n \in \mathbf{N}$.

Овај рад је део материјала за припрему магистарске тезе из Наставе математике „Рекурентне формуле и њихово коришћење у настави комбинаторике и вероватноће у специјализованим математичким школама“ пријављене на Математичком факултету у Београду.

Израчунавање сума типа (1) може бити дугачак и компликован задатак. Дакле, постоји потреба да се нађу другачији начини за израчунавање вероватноћа као што је вероватноћа P_1. На пример, до решења се може доћи и на следећи начин.

Нека је H_k хипотеза да је у k бацања новчића број писама паран, нека је $\overline{H}_k$ њој супротан догађај и нека је $p_k = p(H_k)$. Нека је, даље, A_k догађај да се у k-том бацању добије писмо. Како скуп $\{H_k, \overline{H}_k\}$ чини потпун систем догађаја, примењујемо формулу потпуне вероватноће,

$$\begin{aligned} H_n &= H_{n-1}\overline{A}_n + \overline{H}_{n-1}A_n, \\ p(H_n) &= p(H_{n-1})p(\overline{A}_n \mid H_{n-1}) + p(\overline{H}_{n-1})p(A_n \mid \overline{H}_{n-1}). \end{aligned}$$

С обзиром на уведене ознаке и услове задатка добијамо рекурентну везу

$$p_n = p_{n-1}p(\Gamma) + (1-p_{n-1})p(\Pi) = p_{n-1}\cdot 0{,}5 + (1-p_{n-1})\cdot 0{,}5,$$

одакле директно следи $p_n = 0{,}5$ за свако $n \in \mathbf{N}$.

Дакле, применом рекурентне везе лако смо дошли до решења.

Посматрајмо пример са нехомогеним новчићем.

Пример 2. Наћи вероватноћу да у n бацања нехомогеног новчића ($p(\Pi) = p$, $0 < p < 1$, $p \neq 1/2$) број писама буде паран.

Решење. Слично претходном примеру добијамо

$$P_1 = \binom{n}{0}p^0(1-p)^n + \binom{n}{2}p^2(1-p)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{2k_1}p^{2k_1}(1-p)^{n-2k_1},$$

где је $2k_1 = n$ уколико је n парно и $2k_1 = n-1$ уколико је n непарно.

Ову суму је тешко израчунати. Зато ћемо покушати да применом рекурентних формула олакшамо решавање задатка. Идеја ће бити проширена и на друге типове задатака у којима ће моћи да се примењују диференцне једначине.

С обзиром на услове задатка ($p(\Pi) = p$, $p(\Gamma) = 1-p$ и $0 < p < 1$) и уведене ознаке имамо

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1}(1-p) + (1-p_{n-1})p = (1-2p)p_{n-1} + p, \\ (*) \qquad p_n &- (1-2p)p_{n-1} = p, \qquad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Добијена је једна диференцна једначина првог реда. Пре него што пређемо на њено решавање, даћемо неке детаље о решавању таквих једначина.

Ако је

$$p_n + ap_{n-1} = b, \quad n \in \mathbf{N} \qquad (a, b \in \mathbf{R})$$

општи облик линеарне диференцне једначине првог реда, онда се њено опште решење тражи у облику

$$p_n = p_n^{(H)} + p_n^{(N)},$$

где је $p_n^{(H)}$ опште решење хомогене једначине $p_n + ap_{n-1} = 0$, а $p_n^{(N)}$ је једно решење нехогомогене једначине. Решење $p_n^{(H)}$ се тражи у облику $p_n = cx^n$, где је $x \in \mathbf{R}$ и c је произвољна константа, а решење $p_n^{(N)}$ се тражи у облику какав „диктира“ десна страна. Обично се почиње са $p_n^{(N)} = \lambda$ (λ – константа), а ако не постоји решење у том облику, онда треба узети $p_n^{(N)} = \lambda n$.

У нашем случају имамо $p_n^{(H)} = cx^n$, што заменом у једначини

$$p_n - (1-2p)p_{n-1} = 0$$

даје

$$\begin{gathered} cx^n - (1-2p)cx^{n-1} = 0, \\ cx^{n-1}(x - (1-2p)) = 0, \\ x - (1-2p) = 0, \quad x = 1-2p. \end{gathered}$$

Дакле, $p_n^{(N)} = c(1-2p)^n$, $n \in \mathbf{N}$. Даље имамо $p_n^{(N)} = \lambda$, што заменом у једначини $(*)$ даје $\lambda - (1-2p)\lambda = p$, $2p\lambda = p$, $\lambda = 1/2$. Дакле, добијамо решење

$$p_n = c(1-2p)^n + \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Када се искористи почетни услов да је за $n = 1$, $p_1 = 0$, тј. $0 = c(1-2p) + 1/2$, добијамо $c = \dfrac{1}{2(2p-1)}$, па је решење

$$p_n = \frac{1}{2(2p-1)}(1-2p)^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-(1-2p)^{n-1}), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Дакле, тражену вероватноћу смо добили решавањем диференцне једначине.

Пример 3. Наћи вероватноћу да се у n бацања хомогене коцке број 1 појави паран број пута.

Решење. Нека је $p_{n,2k}$ вероватноћа да се у n бацања коцке број 1 појави $2k$ пута ($0 < 2k \leqslant n$, $k, n \in \mathbf{N}$). Како је коцка хомогена, вероватноћа да падне број један је $p = 1/6$; тада је вероватноћа P_1 да се у n бацања коцке броје један појави паран број пута

$$P_1 = p_{n,0} + p_{n,2} + \cdots + p_{n,2k_1},$$

где је $2k_1 = n$ уколико је n парно и $2k_1 = n-1$ уколико је n непарно. Даље је

$$\begin{aligned} P_1 &= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \cdots + \binom{n}{2k_1}\left(\frac{1}{6}\right)^{2k_1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2k_1} \\ &= \frac{1}{6^n}\left[\binom{n}{0}5^n + \binom{n}{2}5^{n-2} + \cdots + \binom{n}{2k_1}5^{n-2k_1}\right]. \end{aligned}$$

Израчунати ову суму директно није једноставно. Зато ћемо овај задатак да решимо применом рекурентне формуле, аналогно претходном примеру.

Означимо са H_k догађај да се у k бацања добије паран број јединица и са $\overline{H}_k$ њему супротан догађај; са A_k догађај да се у k-том бацању добије јединица и са

$\overline{A}_k$ њему супротан догађај. Нека је даље $p_k = p(H_k)$, $p(A_k) = 1/6$ и $p(\overline{A}_k) = 5/6$. Како скуп $\{H_k, \overline{H}_k\}$ чини потпун систем догађаја, примењујемо формулу потпуне вероватноће,

$$H_n = H_{n-1}\overline{A}_n + \overline{H}_{n-1}A_n,$$
$$p(H_n) = p(H_{n-1})p(\overline{A}_n \mid H_{n-1}) + p(\overline{H}_{n-1})p(A_n \mid \overline{H}_{n-1}).$$

С обзиром на уведене ознаке и услове задатка добијамо рекурентну везу

$$p_n = p_{n-1} \cdot \frac{5}{6} + (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{6},$$
$$p_n - \frac{2}{3}p_{n-1} = \frac{1}{6}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Решење ове рекурентне (диференцне) једначине тражимо у облику $p_n = p_n^{(H)} + p_n^{(N)}$, где је $p_n^{(H)}$ хомогени део, а $p_n^{(N)}$ нехомогени део решења. Хомогени део решења је облика $p_n^{(H)} = cx^n$, па је

$$cx^n - \frac{2}{3}cx^{n-1} = 0, \qquad cx^{n-1}\Big(x - \frac{2}{3}\Big) = 0,$$

одакле је $x = 2/3$, односно $p_n^{(H)} = c\Big(\dfrac{2}{3}\Big)^n$, $n \in \mathbf{N}$.

Нехомогени део решења тражимо у облику константе, јер је таква десна страна наше једначине. Дакле, $p_n^{(N)} = \lambda$, одакле следи

$$\lambda - \frac{2}{3}\lambda = \frac{1}{6}, \qquad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad p_n^{(N)} = \frac{1}{2}.$$

Дакле, добили смо опште решење диференцне једначине у облику

$$p_n = c\Big(\frac{2}{3}\Big)^n + \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

а с обзиром на почетни услов $p_1 = 0$, имамо $c = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{4}$, односно

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{n-1}\right), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Примећујемо да ако се број бацања неограничено повећава, тада $p_n \to 1/2$, што значи да су шансе појављивања броја 1 паран или непаран број пута при великом броју бацања једнаке.

Пример 4. Један пушач је одлучио да остави пушење на следећи начин. Ако једног дана не пуши, онда следећег дана неће пушити са вероватноћом a, а ако одређеног дана пуши, онда ће и следећег дана пушити са вероватноћом b. Наћи вероватноћу p_n да n-тог дана неће пушити. Дан кад први пут размишља о непушењу се узима за нулти дан, односно $p_0 = 0$.

Решење. Применом формуле потпуне вероватноће формирајмо рекурентну везу

$$p_n = p_{n-1}a + (1 - p_{n-1})(1 - b),$$
$$p_n - (a + b - 1)p_{n-1} = 1 - b.$$

Решавањем ове једначине добијамо

$$p_n^{(H)} = (a + b - 1)^n c, \qquad p_n^{(N)} = \lambda, \quad \lambda = \text{const},$$

па је $\lambda - (a + b - 1)\lambda = 1 - b$, $\lambda = -\dfrac{1-b}{a+b-2}$, $p_n^{(N)} = \dfrac{1-b}{2-a-b}$ и

$$p_n = (a + b - 1)^n c - \frac{1-b}{a+b-2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Константу c одређујемо из услова $p_0 = 0$, одакле је $c = \dfrac{1-b}{a+b-2}$, па је решење

$$p_n = \frac{1-b}{a+b-2}(a + b - 1)^n - \frac{1-b}{a+b-2}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Ако је воља пушача јака и одвикавање дуго траје ($n \to \infty$), вероватноћа да неће пушити $p_n \to \dfrac{1-b}{2-a-b}$, јер $(a + b - 1)^n \to 0$, $n \to \infty$.

Пример 5. Играчи A и B договорили су се да одиграју n игара. У свакој игри разликујемо играча који креће први и играча који креће други. Вероватноћа да у једној игри победи играч који први креће у тој игри је p. По правилима игре играч који победи у једној игри креће први у следећој игри. Одредити вероватноћу p_n да победник n-те игре буде играч A ако он креће први у првој игри.

Решење. Применом формуле потпуне вероватноће долазимо до диференцне једначине

$$p_n = p \cdot p_{n-1} + (1 - p_{n-1})(1 - p), \qquad n \in \mathbf{N},$$

уз почетни услов $p_1 = p$. Дакле,

$$p_n = (2p - 1)p_{n-1} + (1 - p), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Решење одговарајуће хомогене једначине је $p_n^{(H)} = (2p - 1)^n c$. Партикуларно решење тражимо у облику константе $p_n^{(N)} = \lambda$, што даје $\lambda - (2p - 1)\lambda = 1 - p$, $\lambda = 1/2$. Зато је

$$p_n = (2p - 1)^n c + \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Константу c одређујемо из почетног услова $p_1 = p$. То даје

$$(2p - 1)^1 c + \frac{1}{2} = p, \quad c = \frac{1}{2p-1}\left(p - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Дакле, решење је $p_n = \dfrac{1}{2}(1 + (2p - 1)^n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Ако се број игара n неограничено повећава, тада $p_n \to 1/2$, што практично значи да су шансе оба играча A и B једнаке.

Пример 6. Свака од n наизглед једнаких кутија има по a белих и b зелених куглица. Из прве кутије се случајно узима једна куглица и пребацује у другу кутију, затим се из друге кутије једна куглица пребацује у трећу кутију и тако редом. Када се из претпоследње кутије једна куглица пребаци у последњу, онда се из ове бира једна куглица. Одредити вероватноћу да се из последње кутије изабере бела куглица ако се зна да је из прве кутије била узета бела куглица.

Решење. Нека је p_k вероватноћа избора беле куглице из k-те кутије. Формирамо релацију на основу формуле потпуне вероватноће

$$p_k = p_{k-1}\,\frac{a+1}{a+b+1} + (1-p_{k-1})\frac{a}{a+b+1}, \qquad k \leqslant n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

После сређивања добијамо рекурентну формулу

$$p_k - \frac{1}{a+b+1}\,p_{k-1} = \frac{a}{a+b+1}, \qquad k \leqslant n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Решавањем ове диференцне једначине добијамо опште решење

$$p_n = \frac{1}{(a+b+1)^n}\,c + \frac{a}{a+b}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Како је $p_1 = \dfrac{a}{a+b}$, добијамо $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{1}{a+b+1}\,c + \dfrac{a}{a+b}$, одакле је $c = 0$. Зато је решење

$$p_n = \frac{a}{a+b}, \quad \text{за свако } n \in \mathbf{N}.$$

Пример 7. Кутије I и II су наизглед једнаке. Зна се да у кутији I има a белих и b зелених куглица, а у кутији II b белих и a зелених куглица. Из кутије I се узима једна куглица. Када се констатује њена боја, она се враћа у исту кутију. Ако је извучена бела куглица, онда се следеће извлачење врши из исте кутије, а ако је извучена зелена куглица, онда се следеће извлачење врши из оне друге кутије. Правило избора кутије из које се извлачи куглица се не мења. Увек се изабрана куглица враћа у кутију из које је узета. Одредити вероватноћу p_n да је n-та куглица бела. Чему тежи p_n кад n тежи бесконачности?

Решење. Из услова задатка долазимо до рекурентне везе

$$p_n = p_{n-1}\,\frac{a}{a+b} + (1-p_{n-1})\,\frac{b}{a+b}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

односно

$$p_n - \frac{a-b}{a+b}\,p_{n-1} = \frac{b}{a+b}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Решавањем ове диференцне једначине добијамо опште решење

$$p_n = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n c + \frac{1}{2}.$$

Како је $p_1 = \dfrac{a}{a+b}$, константу c одређујемо из почетног услова

$$\frac{a}{a+b} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) c + \frac{1}{2}, \qquad c = \frac{1}{2}.$$

Дакле, решење је

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\right), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Одатле следи да $p_n \to 1/2$ кад $n \to \infty$, што практично значи да су шансе да се извуче бела односно зелена куглица једнаке када се број извлачења неограничено повећава.

Пример 8. Особа M одлази на посао аутомобилом, када због саобраћајне гужве касни са вероватноћом $p_A = 1/4$, или трамвајем, када касни са вероватноћом $p_T = 1/2$. Ако једног дана стигне на време, идућег дана не мења превозно средство, а ако закасни, следећег дана мења превозно средство. Нека је $p(z_n)$ вероватноћа да ће M закаснити на посао n-тог дана. Наћи $p(z_n)$ и израчунати $\lim p(z_n)$ када $n \to \infty$.

Решење. Нека је A_n хипотеза да ће особа M n-тог дана ићи на посао аутомобилом. Њена вероватноћа је $p(A_n) = p_n$. Затим, нека је T_n хипотеза да ће особа M n-тог дана ићи на посао трамвајем. Њена вероватноћа је $1 - p_n$. Како скуп $\{A_n, T_n\}$ чини потпун систем догађаја, на основу формуле потпуне вероватноће имамо

$$\begin{aligned} p(A_n) &= p(T_{n-1})p_T + p(A_{n-1})(1 - p_A), \\ p_n &= (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} + p_{n-1}\left(1 - \frac{1}{4}\right), \\ p_n &= \frac{1}{4}\, p_{n-1} + \frac{1}{2}, \qquad n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Решавамо ову диференцну једначину:

$$p_n^{(H)} = \left(\frac{1}{4}\right)^n c, \qquad p_n^{(N)} = \alpha, \qquad \alpha - \frac{1}{4}\alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{2}{3}.$$

Следи

$$p_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n c + \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{3}.$$

Дакле, вероватноћа да ће закаснити n-тог дана је

$$\begin{aligned} p(z_n) &= p(A_n) \cdot \frac{1}{4} + p(T_n) \cdot \frac{1}{2} = p(A_n) \cdot \frac{1}{4} + (1 - p(A_n)) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} p(A_n) \to \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Значи, лице M ће са вероватноћом $1/3$ каснити на посао без обзира којим превозом иде.

Пример 9. Изводи се низ независних опита. У сваком од њих може да се оствари догађај A са вероватноћом p. Резултати се бележе у низу тако што се при реализацији догађаја A уписује 1, а при реализацији њему супротног догађаја уписује 01. Одредити вероватноћу p_n да се на n-том месту у написаном низу резултата појави 1. Чему тежи вероватноћа p_n када n тежи бесконачности?

Решење. Како је p_{n-1} вероватноћа да на $(n-1)$-ом месту буде 1, онда је могућ наставак 1 ако се деси догађај A или 01 ако се деси њему супротан догађај $\overline{A}$. Тада је $1-p_{n-1}$ вероватноћа да се на $(n-1)$-ом месту нађе 0, дакле на $(n-1)$-ом и n-том месту су 01, па је у овом случају увек 1 на n-том месту. На основу формуле тоталне вероватноће имамо

$$p_n = p_{n-1}\cdot p + (1-p_{n-1})\cdot 1 = 1-(1-p)p_{n-1} = 1-qp_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

где је $q = 1-p$. Дакле, добили смо рекурентну формулу

$$p_n + qp_{n-1} = 1, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Решавањем ове диференцне једначине добијамо

$$p_n^{(H)} = c(-q)^n, \qquad p_n^{(N)} = \alpha, \quad \alpha = \text{const}.$$

Опште решење је

$$p_n = c(-q)^n + \frac{1}{1+q}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

но како је $p_1 = p(A) = p$, за $n = 1$ имамо

$$p = c(-q)^1 + \frac{1}{1+q}, \qquad c = \frac{q}{1+q}.$$

Дакле, решење је

$$p_n = \frac{q}{1+q}(-q)^n + \frac{1}{1+q}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Јасно је да $p_n \to \dfrac{1}{1+q}$ кад $n \to \infty$.

Рекурентне формуле се могу користити и за другу врсту задатака, на пример у комбинаторици при разним пребројавањима, што ће се дати у примерима за вежбу.

Следеће задатке предлажемо за самостални рад.

Задатак 1. Један пушач је одлучио да остави пушење. Ако једног дана пуши, онда следећег дана неће пушити са вероватноћом $a = 0{,}3$, а ако одређеног дана не пуши, онда ће следећег дана пушити са вероватноћом $b = 0{,}6$. Одредити вероватноћу p_n да n-тог дана неће пушити.

Задатак 2. Играчи A и B играју серију игара. У свакој игри играч A побеђује са вероватноћом p, а играч B са вероватноћом $q = 1-p$. Победником серије игара сматра се онај играч који први добије две партије више него његов противник. Одредити вероватноћу победе сваког од играча.

Задатак 3. На колико начина се правоугаоник димензија $3 \times 2n$, $n \in \mathbf{N}$, може покрити доминама димензија 2×1?

Задатак 4. На колико делова је подељена раван са n кружница од којих се сваке две секу у двема тачкама и нема ниједне тројке кружница које имају једну заједничку тачку?

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров, *Прикладные задачи теории вероятностеи*, Радио и связь, Москва, 1983.

[2] Ј. Малишић, *Вероватноћа и математичка статистика*, уџбеник за IV разред Математичке гимназије, Круг, Београд, 1999.

[3] Ј. Малишић, *Вероватноћа и математичка статистика*, збирка решених задатака за IV разред гимназије, техничких школа и Математичку гимназију, Круг, Београд, 1997.

[4] П. Младеновић, *Елементарни увод у вероватноћу и статистику*, Материјали за младе математичаре, св. 24, Друштво математичара Србије, Београд, 1992.

[5] Група аутора, *Савезна и републичка математичка такмичења средњошколаца*, Материјали за младе математичаре, св. 16, Друштво математичара Србије, Београд, 1984.

[6] З. Каделбург, П. Младеновић, *Савезна такмичења из математике*, Материјали за младе математичаре, св. 23, Друштво математичара Србије, Београд, 1990.

[7] Р. Тошић, *Комбинаторика*, Природно-математички факултет, Нови Сад, 1998.

[8] А. М. Яглом, И. М. Яглом, *Неэлементарные задачи в элементарном изложении*, Гос. издат. технико-теоретической литературы, Москва, 1954.