Мр Боривој Суботић

ЈЕДНА КАРАКТЕРИСТИЧНА ОСОБИНА ЈЕДНАКОСТРАНИЧНОГ ТРОУГЛА

Показаћемо у овом чланку како доказ једне геометријске неједнакости открива карактеристичну особину једнакостраничног троугла.

Задатак. *Доказати да за произвољан троугао важи неједнакост*

$$\sqrt{3}\,(a+b+c) \geqslant 2(l_a+l_b+l_c),$$

где су a, b, c *странице троугла, а* l_a, l_b, l_c *дужине симетрала унутрашњих углова, при чему једнакост важи само за једнакостранични троугао.*

Докажимо најпре формулу

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abc(s-c)}, \qquad s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Доказ. Изразимо површину троугла на два начина, па добијамо

$$al_c\sin\frac{\gamma}{2}+bl_c\sin\frac{\gamma}{2}=ab\sin\gamma=ab\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

тј. $l_c(a+b)=2ab\cos\dfrac{\gamma}{2}$, односно

$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}. \tag{1}$$

Из косинусне теореме добијамо

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=a^2+b^2-2ab\left(2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1\right).$$

Одавде је $\cos^2\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{(a+b)^2-c^2}{4ab}$, а кореновањем

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{1}{ab}}. \tag{2}$$

Замењујући из (2) у (1) добијамо

$$l_c=\frac{2ab}{a+b}\sqrt{s(s-c)\,\frac{1}{ab}}=\frac{2}{a+b}\sqrt{abs(s-c)}.$$

Како је $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$, то из доказане једнакости следи

$$l_c \leqslant \sqrt{s(s-c)},$$

при чему једнакост важи само за $a = b$. Знамо да дужи s и $s - c$ нису једнаке. Али дужи s и $3(s-c)$ могу бити једнаке. Из једнакости $s = 3(s-c)$ следи да је $a + b = 2c$ а троуглови са таквим односом страница постоје. Зато у неједнакости

$$\sqrt{3}\, l_c \leqslant \sqrt{s \cdot 3(s-c)} \leqslant \frac{s + 3(s-c)}{2}$$

(однос аритметичке и геометријске средине позитивних бројева) једнакост важи за $a + b = 2c$. Дакле,

$$\sqrt{3}\, l_c \leqslant 2s - \frac{3}{2}c,$$

при чему једнакост важи ако и само ако су истовремено испуњени услови $a = b$ и $a + b = 2c$, тј. само за једнакостранични троугао. Дакле, једнакост

$$l_c = \frac{1}{2\sqrt{3}}(4s - 3c)$$

важи за једнакостранични троугао.

Очигледно је даље да је

$$\sqrt{3}\, l_a \leqslant 2s - \frac{3}{2}a,$$
$$\sqrt{3}\, l_b \leqslant 2s - \frac{3}{2}b,$$
$$\sqrt{3}\, l_c \leqslant 2s - \frac{3}{2}c.$$

Сабирајући ове неједнакости добијамо

$$\sqrt{3}\,(l_a + l_b + l_c) \leqslant 6s - \frac{3}{2} \cdot 2s = 3s,$$

односно

$$2(l_a + l_b + l_c) \leqslant \sqrt{3}(a + b + c),$$

при чему једнакост важи само за једнакостранични троугао, чиме је задатак постављен на почетку решен.