Др Миодраг Матељевић

ПРОМЕНА АРГУМЕНТА ДУЖ ПУТА И ЖОРДАНОВЕ ТЕОРЕМЕ

Увод

У овом чланку уводи се појам индекса (број обилазака пута око тачке) и доказују се основне особине индекса и теорема о подели и индексу за затворене Жорданове контуре, које имају важну улогу у математици (топологији, комплексној анализи, диференцијалној и алгебарској геометрији, итд). У уџбеницима комплексне анализе, који се користе углавном на последипломским студијама (в. нпр. [Ah], [Be-G], [Co], [Ru]), индекс се, на пример, користи при доказу Кошијеве интегралне теореме (кратко КИТ). У уџбеницима комплексне анализе, који следе класичну линију, индекс се експлицитно не спомиње, а доказ КИТ изводи се помоћу „засека“.

У [Ма 3] и [Ма 7] указује се на јасне тешкоће које се појављују при класичном доказу Опште Кошијеве интегралне теореме (кратко ОКИТ) помоћу засека и доказу помоћу хомотопије (в. нпр. [Шаб]) и скицира јасан пут прецизног доказа помоћу појма и особина индекса. У угледним уџбеницима (в. нпр. [Ah], [Co], [Ru]) индекс се дефинише помоћу интеграла и сматра се да је то најједноставнији пут да се докаже Теорема о индексу:

Теорема 0.1. *Нека је γ затворен пут у $\mathbb{C}$ и $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. Тада је:*
(а) n_γ целобројна функција на Ω;
(б) n_γ константа на свакој области одређеној са γ,
где је n_γ функција која дефинише број обилазака пута γ око тачке.

У овом чланку даје се „геометријски приступ“: индекс се дефинише и доказује Теорема о индексу помоћу особина аргумента.

На основу теореме о имплицитној функцији контура се може локално представити као график функције. На овој чињеници, коју називамо локалним понашањем контуре и на методу који називамо метод локалних квадрата базирају се докази Жорданове теореме о подели и теореме о индексу за просте затворене контуре:

Теорема 0.2. *Свака проста затворена контура γ дели раван на тачно две компоненте и γ је граница сваке од ових компоненти.*

Теорема 0.3. (Индекс Жордановог пута) *Ако је γ затворена проста контура, тада је:*

1. $Ind_\gamma\ w = 1$ *за свако* $w \in Int\ (\gamma)$;

   или

2. $Ind_\gamma\ w = -1$ *за свако* $w \in Int\ (\gamma)$.

Ако важи 1. *(респективно* 2.*), кажемо да је контура γ позитивно (респективно, негативно) оријентисана.*

Ове теореме имају основну улогу у [Ма 3–6] и [Ма 7]: на пример, у дефиницији регуларне области и позитивно оријентисане границе регуларне области (в. [Ма 3–4], [Ма 7]), доказу ОКИТ помоћу „засека" (в. [Ма 3–4], [Ма 7]) и доказима разних верзија КИТ (хомолошка, за просто повезане области, …). На основу Вежби 2–3 може се показати да су д.п.д. (део-по-део) регуларне области (за дефиницију видети [Ма 3], [Ма 7]) д.п.д. „многострукости" са крајем и отуда извести строг доказ верзије Гринове формуле за ове области (видети нпр. [Зо], [Be-G]).

План овог рада је следећи. У секцијама 1 и 2 дефинише се прецизно промена аргумента дуж пута, доказују основне особине промене аргумента и изводи теорема о поларној репрезентацији пута и на основу ових резултата у другој секцији доказује Теорема о индексу.

У секцији 3 доказују се главни резултати овог рада: Жорданова теорема о подели и теорема о индексу за просте затворене контуре .

1. Дефиниције

Ако је реална функција φ непрекидна на области $\Omega \subseteq \mathbb{C}^\star$ и ако је $z = |z|e^{i\varphi(z)}$ (тј. $\varphi(z) \in Arg\ z$) за свако $z \in \Omega$, φ се назива грана вишезначне функције Arg на Ω и обично се означава са arg.

За $\gamma \in \mathbb{R}$ означимо са $\Lambda_\gamma = \{\rho e^{i\gamma} \mid 0 < \rho < +\infty\}$ полуправе са почетком у координатном почетку које „заклапају" угао γ са $x-$осом. Нека је $\alpha \in \mathbb{R}$ и $O_\alpha = \mathbb{C}^\star \setminus \Lambda_\alpha$.

На основу теореме о јединствености поларне форме, свако $z \in O_\alpha$ може се јединствено представити у облику

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad \varphi \in J_\alpha = (\alpha, \alpha + 2\pi).$$

На овај начин сваком $z \in O_\alpha$ једнозначно је додељено $\varphi = \varphi(z)$ у интервалу J_α, тј. дефинисана је функција $\varphi\colon O_\alpha \to J_\alpha$, која је грана вишезначне функције Arg (грана аргумента) на O_α. Ако желимо да подвучемо да је φ грана Arg, онда уместо φ користимо ознаке arg или $\arg_\alpha$.

Ако је

$$\mathcal{J}_k = \mathcal{J}_k(\alpha) = (\alpha + 2k\pi, \alpha + 2(k+1)\pi), \qquad k \in \mathbb{Z},$$

постоји грана аргумента $\varphi_k\colon O_\alpha \to \mathcal{J}_k$. Користи се и ознака $\arg_k$ уместо φ_k.

Са arg означавамо неку грану аргумента, обично са вредностима у $(0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi)$.

Дефиниција 1. Кажемо да је област Ω O-типа ако $\Omega \subseteq O_\alpha$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$.

На областима O-типа постоји грана аргумента. Ова чињеница има важну улогу у нашем приступу: у дефиницији промене аргумента дуж пута, помоћу које дефинишемо број обилазака (индекс) пута у односу на неку тачку.

Следећи пример је важан за разумевање дефиниције и особина појма промене аргумента дуж пута.

Пример 1. (а) Показати да није тачно да је $\arg\ (zw) = \arg\ z + \arg\ w$.

(б) Показати да је $Arg\ (zw) = Arg\ z + Arg\ w\ (z, w \in \mathbb{C}^\star)$.
Објаснити разлику између тачака (а) и (б).

Нека је γ пут у области O – раван без зрака из координатног почетка. Како на O постоји грана arg, можемо дефинисати промену функције arg дуж γ, у ознаци:

$$\Delta Arg\ \gamma = \arg\ \gamma(1) - \arg\ \gamma(0).$$

Нека је γ пут са параметарским интервалом $I = [0,1]$ и $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1, z_k = \gamma(s_k)$ и нека је пут γ_k рестрикција пута γ на $I_k = [s_k, s_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$. Кратко кажемо да је пут γ подељен тачкама $z_0, z_1, \ldots, z_n$ на путеве γ_k.

Ако је γ пут у $\mathbb{C}^\star$, постоји „подела“ описаног типа, таква да сваки пут γ_k припада области O^k – раван без зрака из координатног почетка. Дакле, можемо дефинисати промену аргумента дуж пута γ, тј.

$$\Delta Arg\ \gamma = \sum_{k=1}^{n} \Delta Arg\ \gamma_k.$$

Нека је γ пут и f непрекидна и различита од нуле на $\gamma^\star$ и $\Gamma = f \circ \gamma$. Промена аргумента функције f дуж пута γ дефинише се као

$$\Delta_\gamma Arg\ f = \Delta Arg\ \Gamma.$$

За комплексну функцију f и комплексан број $a \in \mathbb{C}$ дефинишемо функцију f_a (транслација за вектор a) помоћу $f_a(z) = f(z) - a$.

Ако је γ затворен пут и w не припада $\gamma^\star$, дефинишемо број обилазака пута γ око тачке w као

$$n_\gamma w = n(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi} \Delta Arg\ \gamma_w = \frac{1}{2\pi} \Delta_{t\in I} Arg\ (\gamma(t) - w).$$

У литератури се за број обилазака пута γ око тачке w често користи и ознака $Ind_\gamma w$.

2. Поларна репрезентација пута и теорема о индексу

Ако је γ пут у $\mathbb{C}^\star$, поновимо да постоји „подела“ пута γ таква да сваки пут γ_k припада области O^k – раван без зрака из координатног почетка. Одаберимо гране $\varphi_k = \arg_k$ вишезначне функције Arg на O^k тако да је

$$\varphi_k(z_k) = \varphi_{k+1}(z_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Дефинишимо φ на I, тако да је φ једнако φ_k на $[s_k, s_{k+1})$, $0 \leq k \leq n-1$. Јасно је да је функција φ непрекидна на I и да важи:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}, \quad t \in I. \tag{1}$$

Функција φ назива се грана аргумента дуж γ, а формула (1) поларна репрезентација пута γ. Дакле, доказали смо следећи резултат:

Пропозиција 1. *Нека је $\gamma\colon I \to \mathbb{C}^\star$ пут. Тада постоји непрекидна функција $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ тако да је*

$$\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} = e^{i\varphi(t)}, \quad t \in I$$

и да је

$$\Delta Arg\ \gamma = \varphi(1) - \varphi(0).$$

Функција φ назива се непрекидна грана аргумента дуж пута γ.

Пропозиција 2. *Ако је γ позитивно оријентисан затворен пут, f функција непрекидна на $\gamma^\star$ и $\Gamma = f\circ\gamma$ припада области Ω, која је O-типа, тада је:*

$$\Delta_\gamma Arg\ f = \Delta Arg\ \Gamma = 0.$$

Доказ. На области Ω постоји грана аргумента Arg. Одатле, с обзиром да је Γ затворена контура, тј. $\Gamma(0) = \Gamma(1)$, важи:

$$\Delta_\gamma Arg\ f = \Delta Arg\ \Gamma = Arg\ \Gamma(1) - Arg\ \Gamma(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Подвуцимо да следећу пропозицију користимо у доказу Рушеовог става помоћу Принципа аргумента. У класичној литератури користи се формула (2) без образложења. Овде треба подвући да је $Arg\ (zw) = Arg\ z + Arg\ w$, али у смислу вишезначних функција.

Пропозиција 3. *Ако је γ пут и $f, g\colon \gamma^\star \to \mathbb{C}^\star$ непрекидне функције и $\Gamma_1 = f\circ\gamma$, $\Gamma_2 = g\circ\gamma$, тада:*

$$\Delta_\gamma Arg\ (fg) = \Delta_\gamma Arg\ f + \Delta_\gamma Arg\ g. \tag{2}$$

Доказ. Нека су φ_1 и φ_2, респективно, непрекидне гране аргумента дуж Γ_1 и Γ_2. Функција $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ је непрекидна грана аргумента дуж пута $\Gamma = h\circ\gamma$, где је $h = fg$. $\blacksquare$

Теорема 2.1. (О индексу) *Нека је γ затворен пут $\mathbb{C}$ и $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$. Тада је:*

(а) n_γ целобројна функција на Ω;

(б) n_γ константа на свакој области одређеној са γ.

Доказ. (а) Нека је $a \in \Omega$ и нека је $\varphi = \varphi_a$ грана аргумента дуж γ_a. Тада $\varphi(0) \in Arg\ \gamma_a(0)$ и $\varphi(1) \in Arg\ \gamma_a(1)$. Одатле, с обзиром на то да је $\gamma_a(0) = \gamma_a(1)$ (пут γ је затворен), следи да је $\varphi(1) - \varphi(0) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле,

$$n_\gamma = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi} = k.$$

(б) Нека је $a \in \Omega$ фиксирана тачка, $b \in \Omega$ и нека су φ_a и φ_b, респективно, гране аргумента дуж γ_a и γ_b. Нека је $r > 0$ изабрано тако да $\overline{B} = \overline{B}(a; r) \subset \Omega$. Како је функција $\Phi(z, t) = |\frac{\gamma_z(t)}{|\gamma_z(t)|} - \frac{\gamma_a(t)}{|\gamma_a(t)|}|$ равномерно непрекидна на скупу $\overline{B} \times I$, за свако $\varepsilon > 0$ постоји δ тако да из $|a - b| < \delta$ следи

$$\left| \frac{\gamma_a(t)}{|\gamma_a(t)|} - \frac{\gamma_b(t)}{|\gamma_b(t)|} \right| < \varepsilon, \quad t \in I. \tag{3}$$

Нека је, на пример, $\varepsilon = \sqrt{2}$. Нека је arg грана аргумента на Π^+ са вредностима у $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и $R(t) = \arg \frac{\gamma_b(t)}{\gamma_a(t)}$. Одатле, с обзиром на то да је R непрекидна функција као композиција непрекидних функција, следи $\varphi_b(t) - \varphi_a(t) = R(t) + 2k(t)\pi$, где је $|R(t)| < \frac{\pi}{2}$ и k непрекидна целобројна функција. На уобичајен начин показује се да је $k \equiv k_0$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ и стога $\varphi_b(1) - \varphi_b(0) = \varphi_a(1) - \varphi_a(0) + R(1) - R(0)$. Одатле, на основу Теореме 2(а), како је $|R(1) - R(0)| < \pi$, следи $R(1) = R(0)$, па је $n_\gamma(b) = n_\gamma(a)$. Дакле, n_γ је локално константна функција, па је константа на свакој области одређеној са γ (тј. на свакој компоненти области Ω). ■

Напомена. „Варијацијом“ претходног доказа може се избећи позивање на целобројну функцију k, коју смо користили у доказу.

Ако је $a \in \Omega$ и φ_a грана аргумента дуж γ_a и ако је $b \in \Omega$ изабрано тако да важи (3), где је $\varepsilon = \sqrt{2}$, може се показати да је функција $\varphi_a + R$ грана аргумента дуж γ_b.

3. Проста затворена контура дели раван на две области

За траг пута кажемо да је специјални елементарни график (у односу на координатне осе) ако је задат помоћу једначине $y = f(x)$ или $x = g(y)$, где су f и g непрекидно-диференцијабилне функције на одговарајућем интервалу.

Теорема 3.1. (Жордан) *Свака проста затворена контура γ дели раван на тачно две компоненте и γ је граница сваке од ових компоненти.*

Доказ. Доказ наводимо помоћу следећих тачака (остављамо читаоцу да допуни неке детаље за вежбу).

Означимо са $Q = Q(z; \varepsilon)$ квадрат са средиштем у z, чије су странице дужине ε паралелне са координатним осама. Уведимо нотацију $z = \gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

1. Нека је тачка t регуларна (тј. $\gamma'(t) \neq 0$) и $z = \gamma(t)$. Тада је $x'(t) \neq 0$ или $y'(t) \neq 0$.

Погодно је прво размотрити случај $x'(t) \neq 0$ и $y'(t) \neq 0$. Овај случај је једноставнији и остављамо га за вежбу .

Вежба 1. Ако је $x'(t) \neq 0$ и $y'(t) \neq 0$ показати да је тада локално у околини тачке $z = \gamma(t)$ контура γ елементарни график у односу на обе кординатне осе.

Размотримо преостала два случаја:

(а) Нека је $x'(t) \neq 0$ и $y'(t) = 0$. Тада постоји δ и интервал $I_\delta = [t-\delta, t+\delta]$ тако да је функција x ($x = x(t)$) 1–1 на $I_1 = I_\delta$. Зато на одговарајућем интервалу $I_2 = x(I_\delta)$ постоји инверзна функција $\varphi = x^{-1}$ (пишемо кратко $t = \varphi(x)$). Ако уведемо ознаку $f = y\circ\varphi$, тада је са $y = f(x)$, $x \in I_2$, задат део контуре γ (елементарни график). Означимо са γ^δ рестрикцију γ на интервал $[0,1]\setminus I_\delta$ и изаберимо ε довољно мало тако да контура γ^δ нема заједничких тачака са квадратом $Q(z;\varepsilon)$ и да локални график прво пресече вертикалну ивицу квадрата $Q(z;\varepsilon)$. Подвуцимо да је тада $\gamma^* \cap Q$ повезан скуп. Нека је интервал $J = J_\varepsilon = \{\tau \in [0,1] \mid \gamma(\tau) \in Q(z;\varepsilon)\}$, тј. инверзна слика квадрата $Q(z;\varepsilon)$ при пресликавању γ. Означимо са γ_ε рестрикцију контуре γ на $J = J_\varepsilon$; γ_ε називамо локални лук, а $J = J_\varepsilon$ локални интервал дефинисан тачком t (односно, $z = \gamma(t)$, у односу на контуру γ). Нека је $I^\varepsilon = x(J)$. Није тешко показати да скупови $\{(x,y) \mid x \in I^\varepsilon, y > f(x)\}$ и $\{(x,y) \mid x \in I^\varepsilon, y < f(x)\}$ деле квадрат на две компоненте, на пример A_t и B_t.

(б) Нека је $y'(t) \neq 0$ и $x'(t) = 0$. Слично као у случају (a), показује се да је део контуре γ задат помоћу једначине $x = g(y)$. Зато можемо изабрати ε довољно мало, тако да је пресек контуре γ и квадрата $Q(z;\varepsilon)$ задат помоћу једначине $x = g(y)$.

Дакле, у оба случаја можемо изабрати ε довољно мало, тако да је пресек контуре γ и квадрата $Q(z;\varepsilon)$ задат помоћу једначине $y = f(x)$ или $x = g(y)$ (кажемо: помоћу специјалног елементарног графика функције) и да контура дели квадрат на две компоненте, на пример A_t и B_t.

2. Слично као у тачки 1, у тачки „прелома“ можемо изабрати ε довољно мало, тако да је пресек контуре γ и квадрата $Q(z;\varepsilon)$ задат помоћу два специјална елементарна графика, који имају само једну заједничку тачку и да контура дели квадрат на две компоненте, на пример A_t и B_t.

У овој ситуацији кажемо да су $A = A_t$ и $B = B_t$ локалне компоненте, а $Q = Q_t = Q(z;\varepsilon)$ локални квадрат дефинисан тачком t (односно, $z = \gamma(t)$, у односу на контуру γ).

Придружимо свакој тачки локални квадрат и одговарајуће локалне компоненте. Докажимо:

3. A_t и B_t припадају различитим компонентама скупа $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ за свако t.

Претпоставимо супротно: да за неко $t \in [0,1]$ 3. није тачно. Тада постоје тачке a и b на ∂Q, тако да, на пример, $a \in A$, $b \in B$, $[a,b]$ има само једну заједничку тачку $c = \gamma(s)$ са $\gamma^\star$ и постоји специјална полигонална линија Λ_0 у $\Omega \setminus Q$, која спаја тачке a и b. Нека је Λ специјална полигонална линија која се састоји од Λ_0 и интервала $[a,b]$ и $P = Int\ (\Lambda)$. Тада постоји довољно мало δ тако да, на пример, $\gamma(t) \in P$ за $s < t < s+\delta$ (случај $\gamma(t) \in P$ за $s-\delta < t < s$ разматра се слично). Одатле, најпре, следи $\gamma(t) \in P$ за $s < t < 1$, па стога контура γ није затворена, што је контрадикција.

4. Нека је t_0 произвољна тачка и A_{t_0} једна од две компоненте које придружујемо тачки t_0. Нека је E скуп тачака t такав да постоји полигонална лини-

ја која са γ нема пресечних тачака и која спаја A_{t_0} са једном од две компоненте (означимо је са A_t) које су придружене тачки t. Скуп E је отворено затворен и $E = [0,1]$.

Нека је $t \in [0,1]$ произвољна тачка и нека τ припада локалном интервалу, тј. $\gamma(\tau)$ припада локалном квадрату Q_t придруженом тачки t. Тада:

(в) ако $\tau \in E$, постоји полигонална линија која са γ нема пресечних тачака и која спаја A_{t_0} са једном од две компоненте (означимо је са A_τ). Како је $A_\tau \cap Q_t \neq \varnothing$, једноставно је показати да постоји полигонална линија која са γ нема пресечних тачака и која спаја A_τ са једном од две компоненте квадрата Q_t, па је $t \in E$. Дакле, E је отворен.

(г) Ако $\tau \notin E$, тада, слично као у тачки (в), следи да је $t \notin E$; дакле, E^c је отворен скуп.

Из 4. налазимо:

5. Скуп $V_0 = \bigcup_{0 \le t \le 1} A_t$ припада једној компоненти скупа $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^\star$.

6. Нека је $V_1 = \bigcup_{0 \le t \le 1} B_t$ и нека је r довољно велико тако да кружница T_r садржи контуру γ. Означимо са $Ext\ (\gamma)$ компоненту скупа Ω која садржи T_r. Граница скупа $Ext\ (\gamma)$ припада $\gamma^\star$ и зато скуп $Ext\ (\gamma)$ има пресек са V_0 или V_1. Нека скуп $Ext\ (\gamma)$ има пресек са, на пример, V_1. Одатле је $V_1 \subset Ext\ (\gamma)$. Означимо са $Int\ (\gamma)$ компоненту скупа Ω која садржи V_0.

Како граница сваке компоненте скупа Ω припада $\gamma^\star$, следи да се та компонента поклапа са $Int\ (\gamma)$ или $Ext\ (\gamma)$. Дакле, скупови $Int\ (\gamma)$ и $Ext\ (\gamma)$ су једине компоненте скупа Ω. Како је јасно да су скупови $Int\ (\gamma)$ и $Ext\ (\gamma)$ дисјунктни, одатле следи Жорданова теорема. ■

Вежба 2. Нека је $z = \gamma(t)$ регуларна тачка и $Q = Q_t$ локални квадрат. Ако је локални елементарни график задат помоћу $y = f(x)$ и φ пресликавање дефинисано са $\varphi(x,y) = (x, y - f(x))$, доказати да пресликавање φ локално „исправља" контуру γ.

Вежба 3. Доказати да у околини тачке прелома постоји глатко пресликавање, које локалну контуру пресликава у контуру која се састоји од хоризонталног и вертикалног интервала (в. [Be-G]). Прецизније, ако је γ контура и $p \in \gamma^\star$, тада важи:

(A) постоји околина U_p и дифеоморфизам $\varphi = \varphi_p\ U_p$ на $(-1,1) \times (-1,1)$, тако да је $\varphi(p) = 0$, $J(\varphi) > 0$ и важи једна од следећих једнакости:

(а) $\varphi(U_p \cap \overline{\Omega}) = (-1,0] \times (-1,1)$;

(б) $\varphi(U_p \cap \overline{\Omega}) = (-1,0] \times (-1,0]$;

(в) $\varphi(U_p \cap \overline{\Omega}) = (-1,1) \times (-1,1) \setminus (0,1) \times (0,1)$.

На пример, у [Be-G] уводе дефиницију: област Ω је део по део регуларна ако за сваку тачку $p \in \partial\Omega$ важи (A).

Ако је p регуларна тачка, тада важи (a), а ако је p сингуларна тачка, тада важи (б) или (в). Користимо пресликавање φ из вежбе 2 и пресликавање облика $\psi(x,y) = (x - g(y), y)$.

7. Претпоставимо да важе све до сад уведене ознаке. Означимо са a_1 и b_1 пресечне тачке $Q = Q_t$ са $\gamma^\star$, тако да рестрикција γ_1 контуре γ која припада Q

спаја a_1 и b_1. Нека је γ_2 контура која спаја b_1 и a_1 и има са Q само крајње тачке заједничке, тј. $\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$.

Нека, на пример, $b \in Ext\ (\gamma)$ и нека $a_2 \in (a, c)$ и $b_2 \in (b, c)$. Тачке a_1 и b_1 деле контуру ∂Q на две контуре, Γ_1 и Γ_2, које се могу означити тако да Γ_1 спаја a_1 и b_1 преко a, а Γ_2 спаја a_1 и b_1 преко b. Тада:

(1) број обилазака контуре $\gamma_2 + \Gamma_1$ око тачке a_2 једнак је нули;

(2) број обилазака контуре $\gamma_1 + \Gamma_2^-$ око тачке a_2 једнак је нули;

(3) број обилазака контуре ∂Q око тачке a_2 једнак је 1, где ∂Q означава позитивно оријентисану границу квадрата Q.

Одатле, ако је на пример, Γ_2 оријентисана сагласно са ∂Q, следи $n(\gamma; a_2) = 1$. Дакле, у општем случају, $n(\gamma; a_2) = \pm 1$, па на основу Теореме о индексу, $n(\gamma; z) = \pm 1$ за $z \in Int\ (\gamma)$.

Теорема 3.2. (Индекс Жордановог пута) *Ако је γ затворена проста контура, тада је:*

1. *$Ind_\gamma\ w = 1$ за свако $w \in Int\ (\gamma)$;*
   или
2. *$Ind_\gamma\ w = -1$ за свако $w \in Int\ (\gamma)$.*

Ако важи 1. *(респективно,* 2.*), кажемо да је контура γ позитивно (респективно, негативно) оријентисана.*

ЛИТЕРАТУРА

[Ah] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1966.

[Be-G] A. Barenstein, R. Gay, *Complex variables*, Springer-Verlag, 1991.

[Co] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.

[Je-Ma] M. Jevtić, M. Mateljević, *Analitičke funkcije*, Beograd, 1986.

[Ma 0] М. Матељевић, *О комплексним бројевима и основном ставу алгебре*, Настава математике, Београд, XLVII, 3–4 (2002), 37–47.

[Ma 1] М. Матељевић, *Комплексни бројеви и елементарна геометрија*, у припреми.

[Ma 2] М. Матељевић, *Експоненцијална функција*, у припреми.

[Ma 3] М. Матељевић, *Интеграција*, у припреми.

[Ma 4] М. Матељевић, *КИТ за просто повезане области, хомолошка верзија*, у припреми.

[Ma 5] М. Матељевић, *Основи геометријске теорије*, у припреми.

[Ma 6] М. Матељевић, *Гране, аналитичко продужење и примене*, у припреми.

[Ma 7] М. Матељевић, *Комплексна анализа*, Бања Лука, 2004.

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Co., 1966.

[Зо] В. А. Зорич, *Математический анализ II*, Москва, 1984.

[Шаб] Б. Шабат, *Введение в комплексний анализ*, Москва, 1976.