НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2004, XLIX, 3–4, стр. 30–40

Др Ђурђица Такачи, Душка Пешић

НЕПРЕКИДНОСТ ФУНКЦИЈЕ У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ – МЕТОДА ВИЗУЕЛИЗАЦИЈЕ

У раду се приказује обрада методске јединице непрекидност функције на основу визуелне представе ученика. Полазећи од примера из свакодневног живота у којима се јавља реч непрекидно, долазимо до непрекидности функције на домену. Коришћењем графика одговарајућих функција објашњавамо непрекидност визуелно „помоћу оловке и папира“. Посебна пажња се посвећује функцијама које су непрекидне на домену, али њихови графици имају прекид. Прекиди функција као и особине непрекидних функција анализирају се такође визуелно.

1. Увод

Непрекидност функције је један од најважнијих и најтежих појмова у математичкој анализи и самим тим потребан је посебан приступ овој сложеној наставној теми. Број часова предвиђен за обраду ове наставне теме у средњој школи је мали и зато је неопходно ученицима омогућити да изграде тачну и јасну представу о појму непрекидности, коју ће користити у даљем школовању.

Да би се то постигло потребно је увести овај појам ослањајући се на интуитивну представу коју ученици имају о томе, уз наглашавање свих оних места која би могла изгледати да су у сукобу са том представом. У радовима D. Tall-a, [2] и [3], посебна пажња се посвећује обради непрекидности функције „методом слике“, указује се на важност оваквог приступа као и на потешкоће које ученици имају.

Такође је битно, уколико за то постоје могућности, користити рачунаре у настави математике, који, посебно у обради ове наставне теме, могу помоћи да се приказивањем великог броја илустрација и прављењем анимација овај појам правилно разуме и трајно усвоји.

Пре почетка обраде ове наставне теме треба имати у виду да сваки ученик већ има сопствено виђење појма непрекидности које потиче од уобичајене употребе термина „непрекидно“ у фразама као што су:

- „Снег је непрекидно падао цео дан“ (што значи да није престајао да пада),
- „Телефон је непрекидно звонио читавих 5 минута“,
- „Телевизор је непрекидно радио целу ноћ“, и друго.

Саопштено на 11. Конгресу математичара Србије и Црне Горе, Петровац, септембра 2004.

Из искуства би се могло рећи да је добро почети наставну тему, непрекидност функције, таквим примерима који нису из математике, водећи рачуна да су на одређеном нивоу излагања могућа претеривања у оба смисла:

- сувише олако позивање на интуицију;
- компликовање многобројним дефиницијама и доказима.

Ученици ће имати неке своје примере које треба такође прихватити ако су одговарајући. Приликом разматрања примера потребно је указати и на чињеницу да се непрекидне појаве везују за одговарајући временски интервал на коме се посматрају, цео дан, целу ноћ, итд.

2. Интуитивна представа непрекидне функције

Сада је потребно повезати овакво виђење непрекидности са непрекидности неких функција код којих „мале“ промене независне променљиве изазивају „мале“ промене зависне променљиве. То је добро учинити опет са примерима из живота код којих је независна променљива, на пример, време или место:

- посматрамо висину дрвета у току неког периода;
- дужину косе;
- промену ваздушног притиска у зависности од надморске висине;
- промену брзине аутомобила, и слично.

Даље би се могло прокоментарисати заједно са ученицима у којим ситуацијама би дошло до прекида ових веза (функција), тј. када би дошло до „нагле“ промене вредности функције за малу промену аргумента, и тада се закључи следеће:

- ако неко одсече дрво, тада долази до нагле промене висине дрвета (дакле, та функција је била непрекидна све до момента у коме је дрво одсечено, као и после тога);
- када се неко ошиша (дужина косе је добар пример непрекидне функције, све док се коса не ошиша, а сваки пут при шишању дође до нагле промене зависне променљиве – дужине косе – и до прекида функције);
- када дође до судара два тела, и др.

Такође је добро дати и пример функције која је очито прекидна.

- Количина новца на текућем рачуну (скоковито се мења сваки пут када се уплати или исплати извесна сума, а непрекидна је једино када је вредност новца константна, што је уједно и добар пример да се објасни да је константна функција непрекидна на свом домену).

После оваквог увода, враћамо се на математику, односно на математичке функције, и постави се питање ученицима: „Које су функције по вашем мишљењу непрекидне?“

На то питање добије се много занимљивих одговора:

- у виду конкретних математичких функција: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = kx + n$, $f(x) = x^n$ $(n \in N)$, $f(x) = a^x$ и др, уз различита објашњења из којих се после краће анализе уз помоћ наставника изведе закључак;

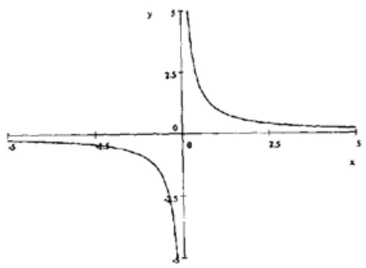
- у виду описа графика функција: непрекидне функције су оне функције чији се график може нацртати у једном потезу без дизања оловке од папира.

Дакле, ученици пре увођења појма непрекидности функција већ имају идеју да график таквих функција може бити нацртан над интервалом „непрекидно без одвајања оловке од папира“. Ту чињеницу добро је илустровати на свакој од познатих функција и при томе свакако нагласити да је и линеарна функција уствари непрекидна функција, што ученици често не примете, у почетку. Домен за сваку од посматраних функција је скуп $\mathbf{R}$, тако да ученици лако прихватају чињеницу да су дате функције непрекидне на свом домену.

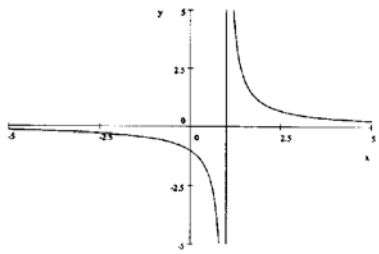
Познато је да је ову дефиницију увео велики швајцарски математичар Леонард Ојлер, средином осамнаестог века.

Ученицима је потребно нагласити да се у извесним деловима ове наставне теме јављају проблеми ако се појам непрекидности веже само за визуелну представу „папир-оловка“. Зато је потребно увек јасно ставити до знања где су могући проблеми, тј. рационалисати проблем, и на време упознати ученике са тим „чудним“ случајевима који могу изазвати збрку у односу на интуитивно прихваћен појам непрекидности.

После визуелне представе „помоћу оловке (креде)“ ученици оправдано сматрају да функције $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ нису непрекидне, јер како кажу: „оловка се мора подићи са папира да би се нацртао график“. Свакако, претходно је потребно нацртати графике ових функција. График функције $f(x) = \frac{1}{x}$ (слика 2.1) ученици добро познају и зато лако и прихватају као пример за различите анализе.



Сл. 2.1



Сл. 2.2

Пре објашњења може се поставити питање:

- где функција $f(x) = \frac{1}{x}$ није непрекидна, по вашем мишљењу?

  Одговор је, увек, да функција f није непрекидна за $x = 0$.

  Следеће питање може бити:

- да ли, ипак, постоје интервали где функција $f(x) = \frac{1}{x}$ јесте непрекидна?

Ученици се замисле и увек бар неко примети да је функција непрекидна за $x > 0$ и за $x < 0$ или непрекидна на неком интервалу $(a, b) \in (0, \infty)$, или $(a, b) \in (-\infty, 0)$.

У овом моменту потребно је повезати примере из живота везане за непрекидност са непрекидношћу функција и поновити да нас занима, у таквим примерима, само одређени временски период. Тако се и непрекидност функција посматра само на домену. Значи, ученицима треба одговорити да су у праву када тврде да је функција $f(x) = \frac{1}{x}$ непрекидна на интервалима $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, али то је и домен функције f, тако да кажемо да је функција непрекидна на свом домену.

Даље би се могло рећи да је функција непрекидна на свом домену ако је она непрекидна у свакој тачки свог домена. Значи у тачкама које нису у домену функција није ни прекидна ни непрекидна (јер у тим тачкама није ни дефинисана). Међутим, код таквих функција можемо казати да се јавља „прекид на графику у некој тачки“, а разлог томе је што функција није дефинисана у тој тачки. То је једно од места које би могло изазвати неслагање са већ изграђеним појмом непрекидности.

Значи, треба нагласити:

- Одговор да функција $f(x) = \frac{1}{x}$ није непрекидна у тачки $x = 0$ није добар. Функција $f(x) = \frac{1}{x}$ има „прекид на графику“ у тачки $x = 0$, која не припада домену.
- Међутим, за функцију $f(x) = \frac{1}{x}$ кажемо да је непрекидна у свакој тачки домена, односно за све $x \neq 0$.

Можемо, даље, питати ученике да сами одреде функције које су непрекидне на домену, а да је домен прави подскуп скупа реалних бројева.

Тако, на пример, функција $f(x) = \frac{1}{x-1}$, чији је график дат на слици 2.2, иако има „прекид на графику“, јер у тачки $x = 1$ није дефинисана, јесте непрекидна функција у свакој тачки домена.

Функције $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ такође треба графички представити и објаснити да су и ове функције непрекидне у свакој тачки домена.

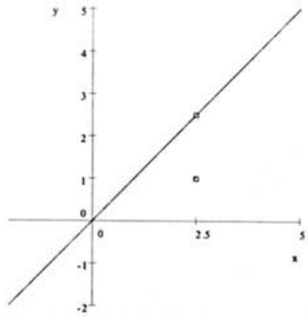
3. Интуитивна представа прекида функције

После овако обрађене непрекидности функције потребно је, аналогно, увести и прекидну функцију, односно на примерима приказати и функције које имају прекид у некој тачки њиховог домена. Приметимо да је визуелна представа непрекидности функције везана за непрекидност на домену, односно на интервалу. Постојање прекида функције указује на чињеницу да постоје тачке у којима функција није непрекидна.

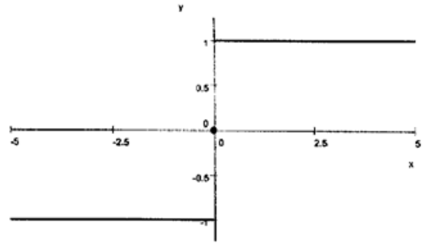
У том смислу, после понављања да су функције $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $\dots$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\dots$, непрекидне функције на домену, ученицима би се могло поставити једно од следећих питања:

- Које су по вашем мишљењу прекидне функције?
- Које функције имају прекид?

Ученици у овом случају најчешће немају одговор или опет наведу неку од непрекидних функција чији „график има прекид“. Функције које су по деловима непрекидне, односно задате по деловима, ученици сматрају „вештачким“, чак их неки и не сматрају функцијама. Ово је једна прилика да им се и ове функције приближе, односно да се наведе и анализира неколико таквих функција.



Сл. 3.1



Сл. 3.2

Као први пример предлажемо функцију која има привидан прекид. Посматрајмо функцију $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ако је } x \neq 2{,}5, \\ 1, & \text{ако је } x = 2{,}5, \end{cases}$ чији је график дат на слици 3.1.

Сада је моменат да кажемо следећу реченицу.

Функција је непрекидна у свим тачкама домена осим у тачки $x = 2{,}5$, где има прекид. (До сада смо говорили да је функција непрекидна на домену.)

Приметимо да тачка $x = 2{,}5$ припада домену функције f.

У овом примеру потребно је истаћи да се и код ове функције јавља „прекид на графику“ у тачки $x = 2{,}5$, али функција заиста и има прекид у тој тачки. Можемо поставити и питање:

- да ли би се могао „отклонити прекид“ код функције g?

Ученици уоче да се променом вредности функције у тачки $x = 2{,}5$ добија позната непрекидна функција $y = x$, односно њиховим речником „да се тачка врати на своје место“.

Следећи пример може бити функција $h(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ако } x > 0, \\ 0, & \text{ако } x = 0, \\ -1, & \text{ако } x < 0, \end{cases}$ чији је график дат на слици 3.2.

Када се графички прикаже функција h, ученици немају дилеме да та функција има прекид у тачки нула. Треба нагласити да тачка $x = 0$ припада домену функције h.

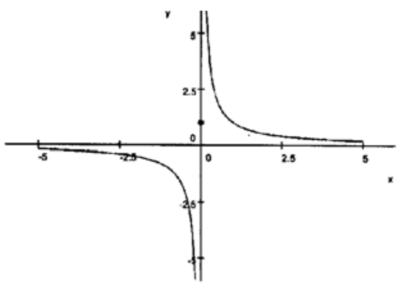
И у овом случају се може поставити питање:

- да ли би се могао „отклонити прекид“ код функције h?

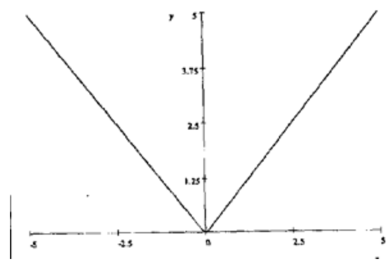
Ученици уоче да се променом вредности функције у тачки $x = 0$, не може „отклонити прекид“.

Посматрајмо сада, на пример, функцију $F(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{ако } x \neq 0, \\ 1, & \text{ако } x = 0, \end{cases}$ чији је график дат на слици 3.3.

Тачка $x = 0$ припада домену функције F и сада овако дефинисана функција има прекид у тачки $x = 0$ за разлику од функције $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, која је непрекидна на свом домену.



Сл. 3.3



Сл. 3.4

У овом случају ученици одмах примете да се ни код функције F „прекид не може отклонити".

Ученицима у овом моменту не спомињемо врсте прекида, што треба урадити после обраде граничних вредности функције.

Ученици су у овом моменту склони да изведу закључак да су све функције задате по деловима и прекидне функције. Да би створили јасну слику о томе потребно је навести и објаснити примере функција које су задате по деловима, а ипак су непрекидне. Један од таквих примера мора бити и $f(x) = |x|$.

4. Особине непрекидних функција

Како су ученици упознати са функцијама које имају прекид, сматрамо да поново треба поставити следећи задатак.

- Набројте непрекидне функције на основу сада већ познате визуелне представе.

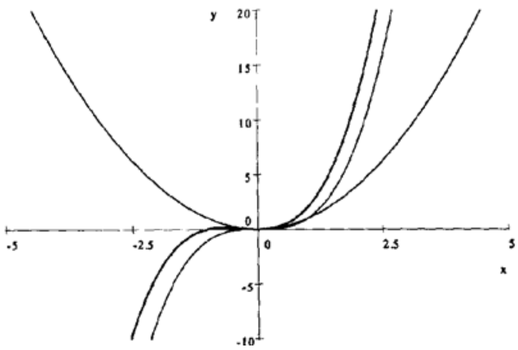
Ученици ће набројати многе њима познате функције, а уз помоћ наставника и све елементарне функције и тада би следило питање:

- шта можемо рећи о збиру, разлици, производу и количнику непрекидних функција? Или можда на други начин:
- да ли је збир, разлика, производ и количник непрекидних функција поново непрекидна функција?

Најчешћи одговор је „јесте". Често ученици имају и коректно визуелно објашњење: ако се графици сваке од функција у збиру, разлици и производу могу нацртати без подизања оловке са папира, тада и графици функција које представљају збир, разлику и производ имају исту особину.

Сматрамо да је сада потребно свакако графички приказати различите примере. У овом случају рачунар би био од велике користи јер се могу посматрати разноврсни примери. Графици су свакако тачнији и уреднији него слика на табли и можемо за кратко време приказати већи број примера.

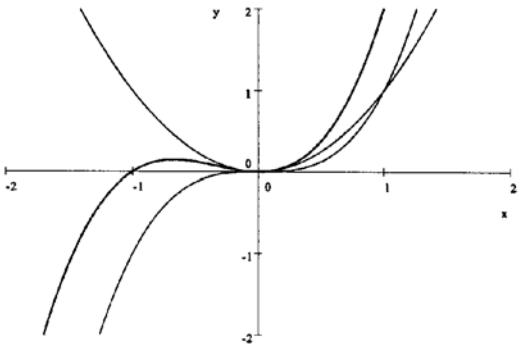
Приликом писања овог рада користили смо програмски пакет Scientific Workplace, који је подесан не само за писање текста него и за илустрацију, односно за графичко приказивање функција. Напоменимо да су графици приказани уз помоћ рачунара много бољи и прегледнији, јер смо у могућности да користимо различите нијансе боја и тиме постижемо боље ефекте.



Сл. 4.1

На пример, већ смо истакли да су функције $f(x) = x^2$ и $g(x) = x^3$ непрекидне на свом домену. Оне се на графику могу представити са две боје а њихови збирови, разлике, и производи са нове три боје или линијама различите врсте и дебљине. На сликама 4.1 и 4.2 графици функција f и g су представљени танком линијом и испрекиданом линијом, а график функције $h(x) = x^2+x^3$ је представљен дебљом линијом.

На слици 4.1 графици су представљени на интервалу $[-5, 5]$, а на слици 4.2 на интервалу $[-2, 2]$ и због тога што се на првој слици график функције g види „изнад" параболе, а на другој слици се боље уочавају делови графика функције g који се налазе „испод" параболе.

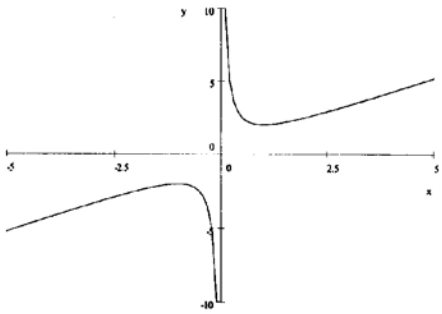


Сл. 4.2

На сваком графику потребно је и визуелно показати да се оловка не подиже са папира на графику функције која представља збир, а аналогно урадити са разликом и производом.

Ученици могу урадити и друге примере, можда за домаћи задатак.

Посебно, свакако треба обратити пажњу на количник непрекидних функција. На пример, количник непрекидних функција $f(x) = x^2 + 1$ и $g(x) = x$ на скупу реалних бројева (слика 4.3) јесте непрекидна функција на свом домену. Приметимо



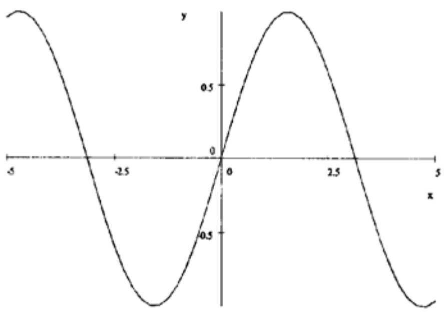
Сл. 4.3

да тачка $x = 0$ не припада домену функције $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

На крају овако визуелно обрађене непрекидности функције веома је важно указати на битну особину непрекидних функција.

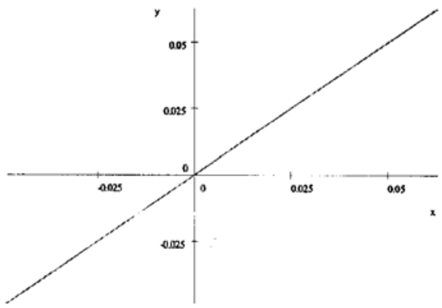
- Мала промена аргумента код непрекидне функције изазива малу промену вредности функције.

Изабере се једна функција, на пример $f(x) = \sin x$. Ово је непрекидна функција на домену. На слици 4.4 представљен је график функције f.



Сл. 4.4

На слици 4.5 представљен је график функције $\sin x$ али у околини тачке $x = 0$.



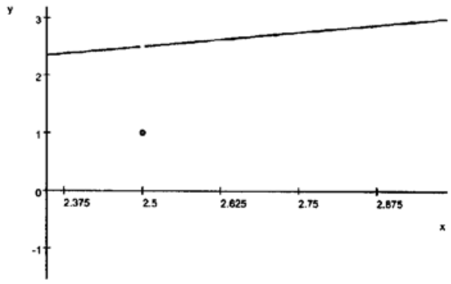
Сл. 4.5

Приметимо да на тако малом интервалу за x око тачке 0, график функције f је „готово“ права линија односно да се „скоро“ поклапа са графиком функције $g(x) = x$.

Веома је важно запазити следеће:

- за $x = 0$, $\sin x = 0$, а за $x = 0{,}025$, $\sin x = 0{,}025$ и тако даље.

Потребно је указати ученицима да ако наставимо да узимамо вредности за x „све ближе“ нули, добићемо да су вредности f такође све „ближе нули“.



Сл. 4.6

Међутим код прекидне функције то није случај.

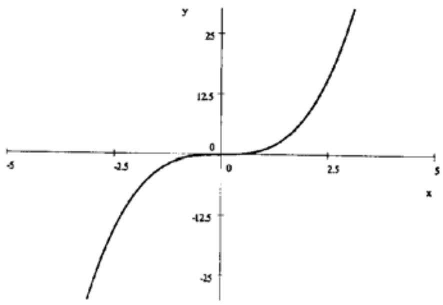
За функцију $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \neq 2{,}5, \\ 1, & \text{ако } x = 2{,}5, \end{cases}$ чији је график на малом интервалу за x око тачке 1, дат на слици 4.6 имамо: за $x = 2{,}5$ је $g(x) = 1$, за $x = 2{,}51$ је $g(x) = 2{,}51$, а за $x = 2{,}501$ је $g(x) = 2{,}501$.

Ако се вредности независно променљиве приближавају броју 2,5, одговарајуће вредности функције се не приближавају броју 1.

Помоћу рачунара можемо представити график функције

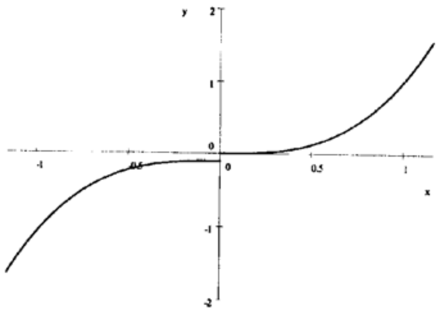
$$h(x) = \begin{cases} x^3, & \text{ако } x > 0, \\ x^3 - 0.1, & \text{ако } x < 0, \end{cases}$$

на слици 4.7.



Сл. 4.7

На слици 4.7 дат је график ове функције. На основу визуелне представе ученици ће рећи да је то непрекидна функција. Међутим, на слици 4.8 график функције је представљен на интервалима $x \in (-1,16, 1{,}16)$, $y \in (-2,2)$ и види се да има прекид у тачки $x = 0$.



Сл. 4.8

Овај пример показује да је потребна велика опрезност приликом визуелне обраде непрекидности функција. Посматрајући само график функције h, дат на слици 4.7 не би се могло уочити да функција h има прекид у нули.

Ако посматрамо вредности независно променљиве x која се „приближава“ 0 преко негативних бројева, за вредности h добијамо:

$$h\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}3 \\ -0{,}1 \\ -0{,}05 \\ -0{,}01 \\ -0{,}005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}225 \\ -0{,}127 \\ -0{,}101 \\ -0{,}10013 \\ -0{,}1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Видимо да се вредност функције не мења ако се вредност независно променљиве промени са $-0{,}01$ на $-0{,}005$, што поново показује да функција није непрекидна у тачки нула.

5. Закључак

Познато је да је непрекидност функције један од најтежих појмова у математичкој анализи. На основу личног дугогодишњег искуства предложили смо један једноставан визуелан приступ обраде градива из непрекидности функције, који сматрамо да ученици могу брзо да прихвате, па се може изложити не само ученицима гимназије, где предајемо, него и у осталим средњим школама у којима се обрађује гранична вредност функције и извод, односно где је потребна непрекидност функције. На пример, да бисмо имали први извод функције у некој тачки потребна је непрекидност функције у тој тачки и тако даље. Такође сматрамо да је ово одличан увод за прецизну дефиницију непрекидне функције и испитивање непрекидности функције, која се обрађује на трећој години код математичког одељења, као и на првој години већине факултета који имају математику.

Како ученици визуелну представу непрекидне функције „помоћу оловке (креде)“ добро прихватају, сматрамо да би се појам непрекидности функције могао обрадити пре увођења појма граничне вредности функције. Међутим, врсте прекида функција треба обрадити после граничне вредности функције.

Знање које ученици стекну о непрекидним функцијама на приказани начин је довољно да се може повезати са осталим садржајима из анализе, па сматрамо да у већини школа и не треба оптерећивати ученике са „ε-δ“ дефиницијом непрекидне функције. За ученике математичког смера овај приступ би био добар увод за каснију обаду „ε-δ“ дефиниције. Дефиницију непрекидне функције у тачки помоћу граничне вредности свакако треба дати свим ученицима који обрађују граничну вредност и повезати са визуелном представом.

Сматрамо да визуелна представа прекидних функција може бити и добар увод за оправданост посматрања граничне вредности функција, посебно оних код којих се разликују лева и десна гранична вредност у некој тачки, нпр. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 3*, Круг, Београд, 1998.

[2] Ј. Д. Кечкић, *Математика са збирком задатака за четврти разред гимназије*, Наука, Београд, 1993.

[3] М. Обрадовић, Д. Георгијевић, *Математика са збирком задатака за четврти разред среде школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.

[4] J. Schmeelk, Dj. Takači, A. Takači, *Elementary Analysis through Examples and Exercises*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[5] D. Tall, A. Vinner, *Concept Image and Concept Definition Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*, Education Studies in Mathematics, 12, 159-169, 1981.

[6] D. Tall, *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof*, in: Groves, D. A., *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495-511, 1991.

[7] D. Tall, *Recent Developments in the Use of Computer to Visualize and Symbolize Calculus Concepts*, The Laboratory Approach to Teaching Calculus, M.A.A. Notes, Vol. 20,15-25, 1991.