Др Владимир Мићић

АЛГЕБАРСКИ САДРЖАЈИ У ПЕТОМ РАЗРЕДУ ОСНОВНЕ ШКОЛЕ (II)

Чланак је компонован од фрагмената нашег приручника за наставнике[1].

3. Разломци

Увод

Имајући у виду узраст ученика петог разреда и период у коме се налазе (почетак периода формалних операција), определили смо се да појам разломка уведемо ослањајући се, претежно, на опажајно сазнавање и већ стечена искуства у вези са природним бројевима, релацијама и операцијама у $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}_0$). Тако смо разломке увели као ознаке за одређене делове изабраних целина, њихово упоређивање и операције с њима у потпуности ослонили на интуитивно схватање тих поступака а својства смо извели користећи се одговарајућим својствима природних бројева, односно бројева из $\mathbf{N}_0$. Тако смо изградили структуру $(\mathbf{Q}_0^+, +, \cdot, <)$ и кроз конкретне активности, показали како смо је могли изградити и дефинишући разломак као количник $a : b$, $a \in \mathbf{N}_0$, $b \in \mathbf{N}$. Трећи приступ, у којем би се раломци појавили као решења једначина облика $bx = a$, $a \in \mathbf{N}_0$, $b \in \mathbf{N}$, само се назире кроз наставну јединицу 5.20.

Настојали смо да, иначе традиционалне, садржаје из ове области обрадимо уз више локалних дедукција, доказујући својства релација и операција у $\mathbf{Q}_0^+$, у нади да те доказе ученици неће доживети као сувишно оптерећење. Више таквих активности уградили смо у наставне јединице 5.11 и 5.12, посвећене децималном записивању разломака и превођењу стандардног $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ и децималног записа једног у други. Мислимо да је то оправдано, како због бољег разумевања да се овде ради о два различита записа (представљања) математичких објеката, што мора, неизоставно, ученик понети из школе, тако и због могућности да се укаже на примене научених садржаја о дељивости у скупу $\mathbf{N}$ ($\mathbf{N}_0$).

Свесни смо да посебни коментар заслужује наше опредељење да мешовите бројеве уведемо на самом крају главе. То је резултат нашег уверења да се оваквим распоредом наставних јединица поједностављује обрада основних садржаја, што представља остварење општег захтева да се, ако је оправдано и остварљиво,

[1] Владимир Мићић, Вера Јоцковић, *Приручник уз уџбеник математике за пети разред основне школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2004, 84 стр.

настава растерети. Уосталом, записивање неправих разломака у облику мешовитих бројева подесно је само за непосредно уочавање њихових целих делова и, на тај начин, писање у облику збирова целих делова и правих разломака уз, традиционално (и ничим оправдано), изостављање знака +. Све даље активности захтевају додатне, понекад и сложене, поступке, којима се надокнађује или наглашава „присуство“ управо тог, прикирвеног знака, или превођење на запис $\frac{a}{b}$ или децимални запис. Очекујемо да ће знатна инерција образовног система, па и његовог дела који се односи на наставу математике, резултирати извесним отпором према овом нашем покушају рационализације. Ипак, охрабрени чињеницом да постоје у свету, али и у нашем непосредном окружењу, оваква, па чак и радикалнија решења (нема записвања неправих разломака у облику мешовитих бројева), определили смо се за овај покушај. Најзад, како то рачунари препознају и како оперишу с неправим разломцима, представљеним у облику мешовитих бројева? Како они (рачунари) прикривају знак +?

Појам разломка

Покушали смо да ову наставну јединицу обрадимо ослањајући се у извесној мери на раније (у другом, трећем и четвртом разреду) усвојена знања. Требало би да се сталност изабране јединице у одређеном контексту (чије делове означавамо разломцима) помери према стицању могућности да се она може појавити у више идентичних примерака, и чињеници да се та целина „одржава“ приликом њеног дељења на делове на различите начине. Можда је и ово прилика да се, у једноставним ситуацијама из свакодневног живота, укаже на чињеницу да се математички појмови граде уз претпоставке о идеалним (замишљеним, претпостављеним) условима. Тешко је, уствари немогуће, у пракси остварити да торта буде облика правог ваљка и да приликом сечења буде исечена на једнаке (подударне) кришке и да, уз то, буде „одржана“ количина. Извесна количина ће се прилепити на нож, а и око или рука или симпатија слављеника ће, случајно или намерно, допринети да неко добија веће парче. Али, ми смо себи доделили право да на такве, практичне сметње, заборавимо, па претпостављамо да је сечење торте извршено идеално. Сличне сметње можемо повезати и са ломљењем чоколаде, дељењем погаче, ..., али и са дељењем дужи на два, четири, ..., једнака дела, дељењем правоугаоника или неке друге фигуре у равни на подударне делове.

Занемарујући различитост садржаја и ове несавршености (шум) формирамо апстрактан појам разломка, за који означавање одговарајућих делова различитих целина представља примере. На тај начин разломком $\frac{1}{2}$ означавамо једну половину јабуке, једну половину табле чоколаде, ... У математици оперишемо апстрактним појмовима, па ће у свим примерима, у којима се њима користимо, шум бити одстрањен. Ако, на пример, кажемо да је половина ученика одељења V_3 добило оцену 5 на писменом из математике, а у одељењу је укупно 28 ученика, тада знамо (израчунавамо) да је број таквих ученика једнак половини укупног броја ученика у одељењу, дакле, једнак 14. Овде смо израчунали једну половину броја 28 ученика у V_3 а нисмо тражили једну половину неке друге карактеристике скупа ученика V_3. Могли смо, на пример, тражити једну половину укупне масе ученика V_3, изражене у килограмима (заокругљено) или једну половину просечне висине, изражене у центиметрима (заокругљено).

Проширивање и скраћивање разломака; упоређивање разломака

У нашој концепцији обраде садржаја из ове наставне теме проширивање и скраћивање разломака је основа за све релације и операције у скупу $\mathbf{Q}_0^+$. При томе је важно у довољној мери наглашавати да су оба ова поступка ослоњена на раније истакнуто „одржавање" количине (величине) приликом њеног дељења или обједињавања делова. Предлажемо да се обавезно записују сви међукораци, будући да се тиме чува контакт са полазним објектом (разломком), што се сматра важним елементом добре наставе математике (и не само ње) и уз то можемо пратити, ученици и наставник, све учињене кораке и њихову оправданост. Стога ћемо подстицати да ученици пишу:

$$\frac{3}{10}=\frac{3\cdot 2}{10\cdot 2}=\frac{6}{20},\qquad \text{уместо}\qquad \frac{3}{10}=\frac{6}{20}.$$

Овде и даље штедимо простор, а у настави је боље поступати на прави начин.

Исто тако ћемо подстицати (тим редом!):

$$\frac{24}{54}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 3\cdot 3}=\frac{2\cdot 2}{3\cdot 3}=\frac{4}{9},\qquad D(4,9)=1,$$

или

$$\frac{24}{54}=\frac{12\cdot 2}{27\cdot 2}=\frac{12}{27}=\frac{4\cdot 3}{9\cdot 3}=\frac{4}{9},\qquad D(4,9)=1,$$

или

$$\frac{24}{54}=\frac{8\cdot 3}{18\cdot 3}=\frac{8}{18}=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2}=\frac{4}{9},\qquad D(4,9)=1,$$

или, евентуално,

$$\frac{24}{54}=\frac{4\cdot 6}{9\cdot 6}=\frac{4}{9},\qquad D(4,9)=1,$$

уместо

$$\frac{24}{54}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9},$$

или

$$\frac{24}{54}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9},$$

или

$$\frac{24}{54}=\frac{4}{9}.$$

При томе предлажемо да се обавезно инсистира на провери да ли је скраћивање извршено до краја, уз одговарајуће записивање те чињенице.

У Уџбенику је илустрован поступак проширивања разломка а поступак скраћивања није. Имали смо прилике да се, заједно с ученицима, којима смо покушавали да илуструјемо скраћивање разломака, уверимо, преко неких писаних материјала (додуше иностраних), како такво илустровање може деловати неприродно, јер подразумева обједињавање претходно добијених делића. Била је то слика торте, издељене на 24 једнаке кришке и 9 кришки је шрафирано (као део торте коју је Ана појела у току дана). На тај начин смо имало информацију да је Ана појела у току дана $\dfrac{9}{24}$ торте. Даље је предложено да се по 3 мале кришке обједине у већу кришку и тако добије 8 већих кришки, од којих је 3 Ана појела у току дана. Требало је да тако буде илустровано $\dfrac{9}{24} = \dfrac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \dfrac{3}{8}$. Међутим, Милош је одмах упитао: „А како ћете, професоре, „лепити“ већ исечене кришке?“ Заиста, како, а уз то и зашто? На поступак сечења 8 већих кришки на по 3 мање кришке, што је илустровало проширивање разломака, ни Милош ни његови другови нису имали примедбе.

Стандардним поступком упоређивања разломака једнаких именилаца тако што упоређујемо њихове бројиоце, ми упоређивање таквих разломака сводимо на упоређивање природних бројева. Потреба за поступком свођења на разломке једнаких именилаца доводи нас у ситуацију да се определимо између двеју могућности. Једна од њих је директно проширивање оба разломка (први имениоцем другог а други имениоцем првог) а друга је свођење на најмањи заједнички именилац, што подразумева налажење најмањег заједничког садржаоца именилаца. Иако други поступак делује рационалније, у „игри“ се појављују по правилу мањи бројеви а и пример је примене раније научених садржаја, сматрамо да прве примере треба обавезно радити директно, користећи се првом могућношћу. На тај начин се дуже чува веза са полазним проблемом и подржава осећај већине ученика да би засигурно и сами тако поступили. Наравно, у другој фази ћемо се, обавезно, користити и другом могућношћу, истичући је пре свега као примену раније усвојених математичких знања. Пример 19 у уџбенику ће, вероватно, неким ученицима (а можда и већини) бити необичан из бар два разлога. Први је чињеница да једнакост задовољавају парови природних бројева а други то што их је више (у нашем случају четири). Такав пример доприноси „разбијању“ стереотипа да је решење једначине, а ова једнакост то јесте, јединствен природан број, а ученици се кроз њега срећу и с методом решавања задатака пребирањем, разликовањем случајева.

Сабирање разломака; својства. Одузимање

Сматрамо да начин увођења разломака за који смо се определили води директно до предложеног начина обраде операције сабирања разломака, свођењем на сабирање природних бројева добијених пребројавањем делића изабране целине у сваком од дисјунктних делова, чијим обједињавањем (унирањем) се налази тражени део. Предлажемо да се, у циљу чувања везе са полазном ситуацијом, при сабирању разломака различитих именилаца, њихово свођење на разломке једнаких именилаца у почетку врши обавезно проширивањем првог сабирка имениоцем другог и проширивањем другог сабирка имениоцем првог. Дакле, обавезно је:

$$\begin{aligned} \frac{5}{12} + \frac{7}{15} &= \frac{5 \cdot 15}{12 \cdot 15} + \frac{7 \cdot 12}{15 \cdot 12} \\ &= \frac{5 \cdot 15 + 7 \cdot 12}{12 \cdot 15} = \frac{159}{180} = \frac{53}{60}, \end{aligned}$$

а не, због $S(12,15)=60$, $60=12\cdot 5=15\cdot 4$,

$$\begin{aligned}\frac{5}{12}+\frac{7}{15}&=\frac{5\cdot 5}{12\cdot 5}+\frac{7\cdot 4}{15\cdot 4}\\&=\frac{5\cdot 5+7\cdot 4}{60}=\frac{53}{60}.\end{aligned}$$

У општем случају предност дајемо поступку

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{c}{d}&=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}\\&=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}.\end{aligned}$$

Тек у другој фази можемо се, због могућег избегавања рачунања с великим бројевима, користити и најмањим заједничким садржаоцем именилаца.

Својства операција и релација у проширеном свету бројева ($\mathbf{Q}_0^+$) изводимо користећи се већ упознатим својствима одговарајућих операција и релација у полазном свету ($\mathbf{N}_0$). То је случај и са операцијом сабирања. Иако смо у Уџбенику настојали да, приликом таквих позивања на својства сабирања у $\mathbf{N}_0$, та својства истакнемо и именујемо, промакло нам је са истакнемо и именујемо својство дељења збира бројем, којим смо се користили у више наврата. Стога предлажемо да се том приликом (тим приликама) подсетимо на примере 28, 29, у којима је, под условом да одговарајући количници постоје, показано да важи

$$(m+n):p=m:p+n:p,$$

што сада пишемо (количници су разломци)

$$\frac{m+n}{p}=\frac{m}{p}+\frac{n}{p}.$$

Ово, у ситуацијама које се овде и даље често јављају, може гласити и

$$\begin{gathered}a=bq+r,\qquad 0\leqslant r<b,\\ \frac{a}{b}=\frac{bq+r}{b}=q+\frac{r}{b}.\end{gathered}$$

Свесни смо да је доказивање чињенице да се својство комутативности операције сабирања чува приликом проширења света бројева са $\mathbf{N}_0$ на $\mathbf{Q}_0^+$, максимум који можемо понудити ученицима, очекујући да ће већина разумети, а известан број умети и да репродукује. Важно је подстаћи их да прихвате као своју, потребу да се таква тврђења поткрепљују неким извођењима (доказима), али је обавезно да сви буду у стању да, у конкретном примеру, искажу тврђење и увере се у његову тачност.

Потпуности ради формулисали смо и доказали својство асоцијативности операције сабирања разломака. Њиме се често користимо и, истини за вољу, прихватамо га, и ми и ученици, без икаквог подозрења. Поред тога, доказ је, нужно, оптерећен са пуно слова и техничких детаља и сигурно би инсистирање на његовом извођењу наишло на отпор код ученика. Стога предлажемо да се примером илуструје ово својство, формулише се, а доказ изостави. Ако неки од ученика покаже интересовање, може му се понудити да за „своју душу“ научи доказ. Иако ово својство даје основу за изостављање заграда, што можемо напоменути инсистирајући на томе, предлажемо да се и овде и даље користе заграде. Боље је употребити заграде и на месту на коме то не морамо него стећи штетну навику „економисања“ заградама, што, по правилу, доводи до озбиљних грешака.

Иако смо склони да број 0 користимо као неутрални елемент за сабирање у сваком контексту у којем га срећемо и сабирање је дефинисано, предлажемо да се једноставан доказ, ослоњен на чињеницу да је број 0 неутрални елемент за сабирање у структури $(\mathbf{N}_0, +, \cdot)$, да 0 јесте неутрални елементи за сабирање и у $(\mathbf{Q}_0^+)$ изведе. Ово представља малу, не претерано захтевну, вежбу извођења закључака на основу претпоставки и познатих чињеница, пример тзв. локалне дедукције.

У вези са одузимањем се може поновити готово све што је речено у вези са сабирањем. Мале тешкоће резултираће из чињенице да се одузимање може извршити, разлика наћи (израчунати) само под условом да је умањеник већи од умањиоца или му је једнак. Но на такве тешкоће смо се већ навикли у вези са одузимањем у $\mathbf{N}_0$.

Предлажемо да се посебна пажња поклони вези између сабирања и одузимања разломака. Знамо да су једнакости

$$a + b = c, \quad a = c - b, \quad b = c - a$$

еквивалентне, „равноправне“, за свако $a, b, c \in \mathbf{N}_0$, односно за свако $a, b, c \in \mathbf{Q}_0^+$ за које постоје (у $\mathbf{N}_0$, односно $\mathbf{Q}_0^+$) сви написани бројеви. Корисно је ове везе илустровати са више примера.

Множење разломака; својства. Дељење

Имајући у виду да је шема на коју ми реагујемо множењем у овом случају сложена, тешко је очекивати да ученици без мноштва урађених и на одговарајући начин илустрованих примера схвате и прихвате дефиницију множења два разломка. Широко је прихваћено да је ово право место да се, уз подстицаје са опажајног нивоа кроз више примера, операција дефинише и, затим, њена својства изведу непосредно из дефиниције. Дакле, ми смо дефинисали у скупу $\mathbf{Q}_0^+$ производ разломака $\dfrac{a}{b}$ и $\dfrac{c}{d}$ као разломак којим се изражава $\dfrac{a}{b}$-ти део од $\dfrac{c}{d}$. На тај начин нашли смо да је

$$\frac{a}{b} \odot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

где је $\odot$ ознака за операцију множења разломака, док су ознаке $\cdot$ у бројиоцу и имениоцу разломка на десној страни од раније познате ознаке за операцију множења у скупу $\mathbf{N}_0$. У Уџбенику смо и за множење разломака сачували стандардну ознаку јер би коментар, који смо управо навели, ученике вероватно збунио и изазвао код њих озбиљне тешкоће. Јасно је да смо сличан коментар могли дати и уз сабирање разломака али смо га изоставили, уверени да је у том случају све било јасно и наше спонтано реаговање на понуђену шему (пребројавање делића дисјунктне уније) природно.

Важно је напоменути да се, кроз даље активности, морамо уверити да се важна својства операције множења бројева у $\mathbf{N}_0$ чувају. Пре свега морамо се уверити да је, за $a, b \in \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Q}_0^+$,

$$a \odot b = a \cdot b.$$

То следи непосредно из дефиниције:

$$a = \frac{a}{1}, \quad b = \frac{b}{1}, \quad a \odot b = \frac{a}{1} \odot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1 \cdot 1} = \frac{a \cdot b}{1} = a \cdot b.$$

Својства комутативности и асоцијативности операције $\odot$ (уз коришћење ознаке $\cdot$) доказана су у Уџенику. Употпунићемо их следећим.

Знамо да је $1 \in \mathbf{N}_0$ и за свако $a \in \mathbf{N}_0$ важи $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. За структуру $(\mathbf{Q}_0^+, \odot)$ важи:

1° $1 \in \mathbf{Q}_0^+$;

2° за свако $\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}_0^+$ важи $\frac{a}{b} \odot 1 = 1 \odot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

Заиста, нека је $m \in \mathbf{N}_0 \setminus \{0\} = \mathbf{N}$. Онда је, за свако такво m, $1 = \frac{m}{m}$ и стога је

$$\frac{a}{b} \odot 1 = \frac{a}{b} \odot \frac{m}{m} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b},$$
$$1 \odot \frac{a}{b} = \frac{m}{m} \odot \frac{a}{b} = \frac{m \cdot a}{m \cdot b} = \frac{a}{b}.$$

Парови разломака чији је производ 1 занимљиви су сами по себи. Ускоро ће се јавити као реципрочни разломци, али није на одмет већ овде нагласити да за $a \neq 0$ и $b \neq 0$ разломци $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ имају наведено својство. Знамо да ће појам инверзног елемента у некој структури, питања његовог постојања и јединствености у значајној мери обележити обраду алгебарских садржаја. Стога сматрамо да је оправдано већ сада најавити да за структуру $(\mathbf{Q}_0^+, \cdot)$ он постоји за сваки елемент различит од 0.

У вези са формулацијом и доказивањем својстава комутативности и асоцијативности операције множења разломака, имајући у виду начин на који смо је дефинисали, предлажемо да се бар једно од њих докаже.

Даљи корак у употпуњавању својстава операција сабирања и множења у $\mathbf{Q}_0^+$ можемо учинити без тешкоћа. Подстицај из скупа $\mathbf{N}_0$ у којем смо показали да важи дистрибутивност множења у односу на сабирање (уз извесна ограничења), уз коришћење тих својстава, резултира дистрибутивношћу множења у односу на сабирање и у односу на одузимање (уз ограничења). Сам доказ је гломазан и може се изоставити приликом реализације ове наставне јединице.

Дефинисање операције дељења разломака помоћу везе између операција множења и дељења је у овом тренутку рационално и води нас директно до свих својстава и могућности примене. Стога на овоме месту нећемо улазити у детаљнију разраду таквих садржаја.

Подсетимо се ипак да смо до сада утврдили да је операција множења разломака затворена у $\mathbf{Q}_0^+$, да је $1 \in \mathbf{Q}_0^+$ и има својство да за сваки $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{Q}_0^+$ важи

$$(*) \qquad \frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Уз то за сваки разломак $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{Q}_0^+ \setminus \{0\}$, постоји њему реципрочан разломак $\dfrac{b}{a} \in \mathbf{Q}_0^+ \setminus \{0\}$, такав да је

$$(**) \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1.$$

Важно је напоменути да је сваки елемент $\dfrac{p}{q}$ скупа $\mathbf{Q}_0^+ \setminus \{0\}$ који испуњава

$$(***) \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

једнак $\dfrac{b}{a}$. Заиста, на основу ранијих својстава структуре $(\mathbf{Q}_0^+, \cdot)$ и релација $(**)$ и $(***)$ следи

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{q} \cdot 1 = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{a}{b}\right) \cdot \frac{b}{a} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}.$$

Напоменимо да, на сличан начин, сваки елемент скупа $\mathbf{Q}_0^+$ за који је испуњено $(*)$, мора бити једнак 1. Заиста, кад би то био неки елемент $e \in \mathbf{Q}_0^+$, имали бисмо да за свако $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{Q}_0^+$ важи

$$\frac{a}{b} \cdot e = e \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Стога (узмимо $\dfrac{a}{b} = 1 \in \mathbf{Q}_0^+$)

$$1 = 1 \cdot e = e \cdot 1 = e,$$

што доказује наше тврђење. Дакле, мора бити $e = 1$, што значи да је e неки од разломака $\dfrac{1}{1}, \dfrac{2}{2}, \dfrac{3}{3}, \dfrac{4}{4}, \ldots$