Јелена Татар

ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ ФУНКЦИЈЕ

Резултати и анализа провере примене знања везаних за дату тему

У раду излажемо задатке којима смо проверавали познавање и примену знања везаних за наставну тему гранична вредност функције. Задатке су радили ученици IV разреда гимназије. Приказујемо и анализирамо резултате овог теста, с циљем да нам укажу на најчешће проблеме које ученици имају при савладавању овог појма, како би у даљем раду са ученицима те проблеме превазишли.

1. Увод

Гранична вредност функције је један од полазних појмова у математичкој анализи. Са овим појмом се ученици сусрећу у вишим разредима средње школе; III или IV разреду у зависности од типа школе и смера, али и студенти на великом броју факултета и виших школа у оквиру разних курсева математике.

Појам граничне вредности функције већина ученика тешко разуме. Разлози за ово су многоструки. Они се могу приписати извесној апстрактности граничних процеса за ученике овог узраста. Разлог може бити и уобичајени начин увођења и обраде овог појма, који се у значајној мери разликује од садржаја с којима су се сретали у ранијем изучавању математике.

Имајући ово у виду, посебну пажњу морамо посветити увођењу самог појма граничне вредности функције и обради садржаја везаних за њега. Такође, стално морамо пратити и проверавати колико су ученици овај појам разумели, колико су овладали оперативним техникама и колико су у стању да та знања примене у даљем изучавању математике.

У раду приказујемо резултате експерименталног истраживања које обухвата анализу резултата теста (контролног задатка) којим смо код ученика проверавали познавање граничне вредности функције. При одабиру задатака водили смо рачуна да буду репрезентативни за ову наставну тему. У питању су, не тешки, него лакши, препознатљиви задаци чије би решавање требало да постане трајни део њихове математичке културе.

Тестирање је обављено почетком фебруара месеца 2003. године, што је битно за обраду података, јер тестирање није обављено непосредно по завршетку

Саопштено на 11. конгресу математичара Србије и Црне Горе, Петровац, 2004.

обраде наставне јединице, него пар месеци касније, без икакве најаве и припреме ученика за тест. Овим смо хтели да проверимо не само колико су ученици усвојили потребне оперативне технике, него и колика је трајност тог знања. Тестирање је трајало један школски час и задатке су радили ученици четвртог разреда природно-математичког и општег смера гимназије.

Циљ истраживања је био да покаже колико су ученици усвојили појам и израчунавања граничних вредности функције и колико су у стању да та знања примене, уколико се јаве у оквиру неког задатка у градиву које се касније обрађује (нпр. испитивање функције и цртање графика). Истичемо да се не проверава познавање самог појма граничне вредности функције (дефиниција и последице), већ само израчунавање, коришћењем особина и препознавањем типских задатака. Не мање важан циљ овог истраживања био је да идентификујемо најучесталије грешке које ученици праве решавајући овакве задатке, како бисмо у даљем раду са ученицима могли да их избегнемо.

Истраживање је спроведено у оквиру припреме магистарске тезе под менторством проф. др Ђурђице Такачи.

У раду прво наводимо задатке који су рађени и кратко образложење за такав избор задатака. У следећем делу наводимо укупне резултате тестирања, затим анализу резултата тестирања и на крају закључке до којих смо, анализирајући све наведено, дошли.

2. Задаци на тесту

На тесту су ученицима задати следећи задаци.

1. Израчунати граничну вредност (без примене Лопиталовог правила):

$$\text{а)}\quad \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}; \qquad \text{б)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x+1}{x^3-1}\right);$$

$$\text{в)}\quad \lim_{x\to \infty}\left(\frac{2x-1}{2x+2}\right)^{x+1}; \qquad \text{г)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}.$$

2. Испитати понашање на границама домена (асимптоте):

$$\text{а)}\quad f(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}; \qquad \text{б)}\quad f(x)=\frac{2x}{x^2-25}.$$

У првом задаку требало је израчунати четири граничне вредности које се своде на неодређене изразе „$\frac{0}{0}$“, „1^∞“ и „$\infty-\infty$“. У питању су такозвани типски задаци који се посебно обрађују на часовима предвиђеним за то у оквиру теме Гранична вредност функције (планом је предвиђено 4 часа за обраду типских задатака на природно-математичком и општем смеру гимназије). При одабиру задатака, вођено је рачуна да буду заступљени различити типови граничних вредности као и да то буду они задаци са којима ће се ученици најчешће сретати у даљем изучавању математике.

Други задатак је одређивање асимптота дате функције, што је, практично, примена граничних вредности. Дате су алгебарске функције, јер их сматрамо најједноставнијим и највише примереним за тај узраст и најширу популацију ученика. Треба истаћи да, у средњошколској настави математике, појму граничне вредности функције претходи тема Функције у оквиру које се ученици подсећају и упознају са појмовима домен, кодомен, парност, нуле и знак, монотоност, ограниченост, ... Стога се у оквиру овог задатка очекује да ученици прво одреде домен функције. Такође, очекује се да при одређивању асимптота могу да искористе парност или непарност функције, као и знак функције.

3. Укупни резултати тестирања

Приказујемо укупне резултате теститања двема табелама и одговарајућим графиконима.

У првој табели приказујемо колико је ученика и како урадило који задатак и то изражавамо у процентима и приказујемо графиконом 1. На вертикалној оси графикона 1, број 1 представља прву колону, ученике који су наведени задатак тачно урадили, број 2 другу колону, значи делимично тачне одговоре, број 3 нетачне и број 4 број ученика који нису одговорили.

	тачних одговора	делимичних одговора	нетачних одговора	без одговора	укупно (100%)
1.а	78 (42%)	11 (6%)	71 (38%)	25 (14%)	185
1.б	78 (42%)	10 (5%)	71 (38%)	26 (15%)	185
1.в	52 (28%)	30 (16%)	41 (22%)	62 (34%)	185
1.г	47 (25%)	10 (5%)	24 (13%)	104 (57%)	185
2.а	78 (42%)	53 (29%)	31 (17%)	23 (12%)	185
2.б	85 (46%)	52 (28%)	27 (15%)	21 (11%)	185

табела 1

Са графикона 1. је интересантно приметити да се линије које одговарају задацима 1.а и 1.б као и оне које одговарају задацима 2.а и 2.б практично поклапају.

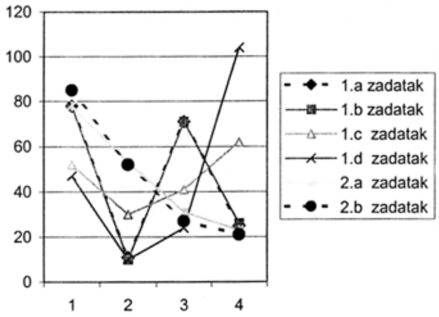
Табелом и графиконом 2. показујемо колико је ученика урадило који проценат теста, а то би практично представљало оцене на тестирању, да се тест оцењивао.

0%--40%	40%--55%	55%--70%	70%--85%	85%--100%
54	41	30	21	29

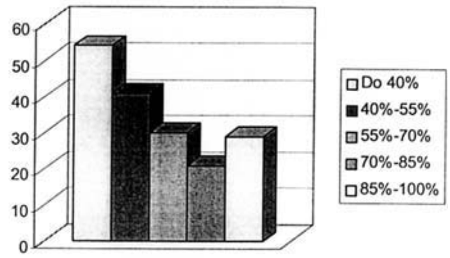
табела 2

4. Анализа резултата теста

У овом делу рада уз сваки задатак прво излажемо један начин решавања, а затим анализирамо колико га је ученика урадило. Такође, истичемо и анализирамо најчешће грешке које су ученици правили решавајући дати задатак.



графикон 1



графикон 2

1.a. *Израчунати граничну вредност* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+21}+5}{\sqrt{x^2+21}+5} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+21-25}{(x-2)(\sqrt{x^2+21}+5)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+21}+5)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+21}+5} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

Задатак је урадило 42% ученика.

Најчешћа грешка коју су правили ученици при решавању овог задатка (преко 30%), је што су задатак решавали као да се тражи гранична вредност кад $x \to \infty$, издвајајући највиши степен у имениоцу и бројиоцу, а затим користећи $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Још једна учестала грешка је проширивање разломка са $x+2$, уместо са $\sqrt{x^2+21}+5$, што може да указује на присећање на идеју која се у задатку користи.

1.б. *Израчунати граничну вредност* $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x+1}{x^3-1}\right)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x+1}{x^3-1}\right) &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}\right) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1-2x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{(x-1)(x^2+x+1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Задатак је урадило 42% ученика.

У овоме задатку се понавља грешка из претходног – ученици траже граничну вредност као да $x \to \infty$.

У великом броју нерешених, али и делимично урађених задатака, појавио се проблем факторисања разлике кубова $x^3 - 1$.

1.в. Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)^{x+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+2}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2-2}{2x+2}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x+2}\right)^{x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{2x+2}{3}}\right)^{\frac{2(x+1)}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

Задатак је тачно урадило 28% ученика. Велики број ученика није ни покушао да уради задатак, чак њих 34%.

Код ученика који су делимично тачно урадили задатак грешка је била резултат $e^{3/2}$, уместо $e^{-3/2}$, позивајући се да је $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x = e$, а треба e^{-1}.

Ученици који су нетачно урадили задатак, најчешће су за резултат добили јединицу не водећи рачуна да је у питању неодређени израз облика „1^∞“.

1.г. Израчунати граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{\sin nx}\cdot\frac{mnx}{mnx} = \frac{m}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{nx}} = \frac{m}{n}.$$

Може се рећи да је ово највише „избегаван“ задатак; 57% ученика није ни покушало да га уради, што указује да ученици не воле и не памте тригонометрију (адиционе теореме) и унапред избегавају све што на то подсећа.

Ученици који су делимично тачно урадили задатак препознали су да се у решавању задатка треба позвати на познату граничну вредност $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$, али су грешили при израчунавању.

2. *Испитати понашање функције на границама домена (асимптоте функције).*

2.а. Домен функције је $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, значи, испитујемо леву и десну граничну вредност у нули и граничне вредности у $+\infty$ и $-\infty$.

i) Посматрамо $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2x^2-x-1}{x}$ и закључујемо да је та гранична вредност $-\infty$; своди се на израз типа „$1/0$“ и при томе су именилац и бројилац супротног знака (бројилац тежи -1, а именилац је позитиван број близак 0). Аналогно, за леву граничну вредност добијамо $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2x^2-x-1}{x} = +\infty$. Значи закључујемо да је права $x = 0$ вертикална асимптота функције.

ii) Посматрамо сад $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x-1}{x}$. Како је степен бројиоца већи од степена имениоца, закључујемо да је та гранична вредност $+\infty$. Аналогно, гранична вредност кад $x\to-\infty$ је $-\infty$, што значи да функција нема хоризонталне асимптоте.

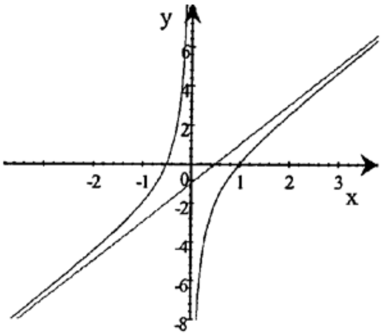
iii) Коначно, испитујемо постојање косе асимптоте $y=kx+n$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-x^{-1}-x^{-2})}{x^2}=2,$$
$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-x-1}{x}-2x\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x-1-2x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-1}{x}=-1.$$

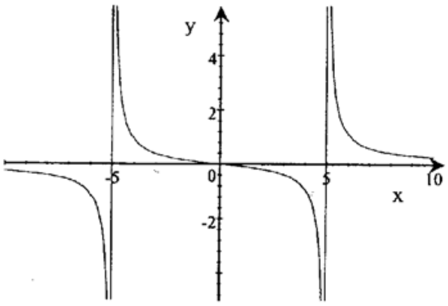
Аналогно, са граничном вредности кад $x\to-\infty$.

Значи, коса асимптота је права $y=2x-1$.

График функције $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x}$ је приказан на слици 1.



слика 1



слика 2

2.б. Као и у претходном задатку, одредимо домен; то је скуп $\mathbf{R}\setminus\{-5,5\}$. Такође, можемо приметити да је функција непарна, график централно симетричан у односу на координатни почетак, па је довољно испитати понашање само на интервалу $(0,+\infty)$.

i) Испитивањем леве и десне граничне вредности у $x=5$, добијамо да су праве $x=5$ и $x=-5$ (због симетричности) вертикалне асимптоте функције.

ii) Испитивањем граничне вредности у $+\infty$ добијамо да је права $y=0$ хоризонтална асимптота. (Можемо приметити да је степен бројиоца мањи од степена имениоца, па је тражена гранична вредност нула).

iii) Косих асимптота нема.

График функције $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-25}$ је приказан на слици 2.

Задаци 2.а и 2.б су највише рађени и најуспешније урађени (42% ученика је тачно урадило први, а 46% други задатак). То је последица, вероватно, и тога што је то „најсвежије“ градиво које је понављано непосредно пред тест (испитивање функције и цртање графика).

Можемо приметити да скоро сви ученици знају да треба да испитују постојање граничних вредности на границама домена. Проблеми су се јавили при самом израчунавању, али се показало и да известан број ученика не зна која од наведених граничних вредности даје постојање које асимптоте. Значи, деси се да ученик израчуна све тражене граничне вредности, али не наведе која од асимптота постоји, а која не, као ни њихове једначине.

При одређивању вертикалне асимптоте је, приближно 10% ученика одмах по одређивању домена, без израчунавања граничних вредности, закључило да је вертикална асимптота $x = 0$ у првом, односно праве $x = 5$ и $x = -5$ у другом задатку, што у општем случају не важи. Наиме, функција нема увек у тачкама у којима није дефинисана вертикалну асимптоту (нпр. функција $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ која у тачки $x = 1$ није дефинисана, а нема вертикалну асимптоту).

Мањи број ученика је при одређивању вертикалне асимптоте тражио $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, добијајући при томе израз облика „$c/0$“, те закључио постојање вертикалне асимптоте.

Већина је ипак испитивала постојање леве и десне граничне вредности, најчешће користећи се знаком функције.

При испитивању постојања хоризонталне и косе асимптоте, углавном су посматране граничне вредности у $+\infty$ и $-\infty$ истовремено.

Нико од ученика није користио непарност функције у другом задатку.

Сви ученици су испитивали и постојање хоризонталне и постојање косе асимптоте, иако, кад докажемо постојање једне (на пример у $+\infty$), знамо да друга не може постојати.

Показало се да неки ученици нису сигурни која је од правих $x = c$ и $y = c$ (c је константа) паралелна са којом осом тј. које су праве вертикалне, а које хоризонталне.

У извесном броју задатака се појавио проблем код одређивања k и n у једначини косе асимптоте. После одређивања k, због погрешног израчунавања, добијају да је $n = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \infty$ и закључе да је коса асимптота права $y = kx$, што не би било тачно ни да је та гранична вредност тачно израчуната; то би значило да коса асимптота не постоји.

5. Закључак

Анализирајући резултате теста изводимо следећа опажања.

Примећујемо да близу 30% ученика није урадило ни 40% задатих задатака, што се сматра неким минимумом за прелазну оцену. Са̂мом просечном оценом, која би износила 2,46, не можемо бити задовољни, али треба имати у виду да би та оцена била већа да је тест обављен непосредно по завршетку методске јединице, као и да су ученици били припремљени за проверу.

Као што смо и очекивали, највећи број ученика је савладао израчунавање граничних вредности алгебарских функција. Задатке 1.а, 1.б, 2.а и 2.б је урадило преко 40% ученика и тај проценат је приближно једнак у сва четири задатка.

Слабије су рађени и урађени задаци 1.в и 1.г, што је такође било очекивано. Ученици заиста избегавају тригонометрију, не само у задацима са граничним вредностима, него уопште. Овај проблем би можда могли да превазиђемо тако што ћемо тригонометрију (која се обрађује у II разреду) више провлачити кроз градиво III разреда и на тај начин ученицима не дозволити да тако важну област занемаре.

Слично је и са бројем e, који се дефинише у III разреду у оквиру наставне теме Низови, али који већина ученика не прихвати и избегава задатке у којима се јавља. Ово је разумљивије, узевши у обзир број часова предвиђен за увођење броја e као и сам начин увођења.

Можемо приметити да нема велике разлике између резултата тестирања ученика природног и општег смера, који ово градиво и обрађују по истом наставном плану и програму и са истим фондом часова. Било би занимљиво упоредити их са резултатима истог или сличног тестирања ученика математичког смера, што овом приликом није урађено, због великих разлика у наставном плану, тако да се ова наставна јединица не обрађује ни у истом узрасту, ни у исто време.

ЛИТЕРАТУРА

[1] G. T. Bagni, *Some "impossible" problems in high school students' behavior*, in: Gagatis, A. (Ed.), (2001.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, I, Intercollege Press Cyprus, Nicosia, 45-66.

[2] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 3*, уџбеник са збирком задатака за III разред Математичке гимназије, „Круг“, Београд, 1998.

[3] J. Д. Кечкић, *Математика са збирком задатака за IV разред гимназије*, „Наука“, Београд, 1993.

[4] Е. Пап, З. Лозанов-Црвенковић, *Математика са збирком задатака за IV разред средње школе*, Завод за издавање уџбеника и наставна средства, Београд, 1994.

[5] Ђ. Такачи, А. Такачи, *Диференцијални и интегрални рачун*, Stylos, Нови Сад, 1997.