Др Шефкет Арсланагић

НЕКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ У ТРОУГЛУ ЗА R, r, r_a, r_b И r_c

Овдје ћемо најприје извести двије једнакости у троуглу у којима се налазе R, r, r_a, r_b и r_c. При томе је R радијус описане кружнице троугла, r радијус уписане кружнице у троугао, а r_a, r_b, r_c радијуси приписаних кружница. Добро су нам познати обрасци

$$R = \frac{abc}{4P} \quad \text{и} \quad r = \frac{P}{s}, \tag{1}$$

гдје је $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ површина троугла (Херонов образац), а $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ његов полуобим. Такође, лако се изводе обрасци

$$r_a = \frac{P}{s-a}, \quad r_b = \frac{P}{s-b}, \quad r_c = \frac{P}{s-c}. \tag{2}$$

Сада ћемо доказати да вриједе једнакости:

$$\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right) = \frac{4R}{r}. \tag{3}$$

и

$$\frac{a^2}{r_b r_c} + \frac{b^2}{r_c r_a} + \frac{c^2}{r_a r_b} = 4\left(\frac{R}{r} - 1\right). \tag{4}$$

Докажимо најприје (3). Користећи (1) и (2), доста једноставно се изводе једнакости

$$r_a r_b r_c = s^2 r; \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = s^2, \quad r_a + r_b + r_c = 4R + r. \tag{5}$$

Сада имамо због (5),

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{r_a}{r} - 1\right)\left(\frac{r_b}{r} - 1\right)\left(\frac{r_c}{r} - 1\right) \\
&\qquad = \frac{1}{r^3} \cdot r_a r_b r_c - \frac{1}{r^2}(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) + \frac{1}{r}(r_a + r_b + r_c) - 1 \\
&\qquad = \frac{1}{r^3} \cdot s^2 r - \frac{1}{r^2} \cdot s^2 + \frac{1}{r}(4R + r) - 1 = \frac{4R}{r}.
\end{aligned}$$

Дакле, једнакост (3) је тачна.

Пређимо на доказ једнакости (4). Имамо због (2),

$$S=\frac{a^2}{r_br_c}+\frac{b^2}{r_cr_a}+\frac{c^2}{r_ar_b}=\frac{a^2}{s(s-a)}+\frac{b^2}{s(s-b)}+\frac{c^2}{s(s-c)} \tag{6}$$
$$=\frac{a^2(s-b)(s-c)+b^2(s-c)(s-a)+c^2(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{1}{4P^2}[a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)].$$

Доказаћемо сада да вриједе једнакости:

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=2s^2-2r^2-8Rr,\\ ab+bc+ca&=s^2+r^2+4Rr, \\ abc&=4Rrs. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Доказ. Имамо

$$ab+bc+ca=2s^2-2s^2+ab+bc+ca=2s^2-s\cdot 2s+ab+bc+ca$$
$$=2s^2-s(a+b+c)+ab+bc+ca$$
$$=\frac{s^3+s^3-s^2(a+b+c)+sab+sbc+sca+abc-abc}{s}$$
$$=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)+s^3+abc}{s}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}+s^2+\frac{abc}{s}$$
$$=\frac{P^2}{s^2}+s^2+\frac{abc}{P}\cdot\frac{P}{s}=r^2+s^2+4Rr,$$

тј. $ab+bc+ca=r^2+s^2+4Rr$.

Даље је $(a+b+c)^2=(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$, а одавде, због горње једнакости,

$$a^2+b^2+c^2=(2s)^2-2(r^2+s^2+4Rr)=4s^2-2r^2-2s^2-8Rr$$
$$=2s^2-2r^2-8Rr,$$

те због (1) и (2) имамо $abc=4Rrs$. Овим су једнакости $(*)$ доказане.

Сада имамо $a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, те $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$, тј.

$$a^4+b^4+c^4=(a^2+b^2+c^2)^2-2(ab+bc+ca)^2+4abc(a+b+c)$$
$$=(2s^2-2r^2-8Rr)^2-2(s^2+r^2+4Rr)^2+32Rrs^2$$

и

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(s^2+r^2+4Rr)^2-16Rrs^2.$$

Сада имамо из (6),

$$S=\frac{1}{4r^2s^2}[(2s^2-2r^2-8Rr)^2-4(s^2+r^2+4Rr)^2+80Rrs^2]=\frac{1}{4r^2s^2}(16Rrs^2-16r^2s^2),$$

тј. $S=\dfrac{a^2}{r_br_c}+\dfrac{b^2}{r_cr_a}+\dfrac{c^2}{r_ar_b}=4\left(\dfrac{R}{r}-1\right)$. Овим је доказана и једнакост (4).

Сада ћемо доказати да у троуглу вриједе неједнакости:

(7) $$\left(\frac{r_a}{r}-1\right)\left(\frac{r_b}{r}-1\right)\left(\frac{r_c}{r}-1\right)\geqslant 8$$

и

(8) $$\frac{a^2}{r_b r_c}+\frac{b^2}{r_c r_a}+\frac{c^2}{r_a r_b}\geqslant 4.$$

При томе ћемо користити чувену (Ојлерову) неједнакост

(9) $$R\geqslant 2r$$

која је посљедица једнакости

$$\overline{OI}^2=R(R-2r)\geqslant 0,$$

гдје су тачке O и I центри описане и уписане кружнице троугла.

Даћемо још један доказ неједнакости (9). Ако су a, b, c странице троугла, тада је

$$\sqrt{a^2-(b-c)^2}\leqslant a,\quad \sqrt{b^2-(c-a)^2}\leqslant b,\quad \sqrt{c^2-(a-b)^2}\leqslant c,$$

па је након множења ових неједнакости

$$\sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2}\leqslant abc.$$

Како су $a+b-c$, $b+c-a$, $c+a-b$ позитивни бројеви (због неједнакости троугла), то је одавде

(∗∗) $$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc.$$

Саад имамо

$$\frac{r}{R}=\frac{\dfrac{P}{s}}{\dfrac{abc}{4P}}=\frac{4P^2}{abcs}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{abcs}=\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{2abc},$$

тј, због (∗∗),

$$\frac{r}{R}\leqslant\frac{abc}{2abc}=\frac{1}{2},$$

а одавде $R\geqslant 2r$.

Због (9) имамо

$$\frac{4R}{r}\geqslant 8 \qquad \text{и} \qquad 4\left(\frac{R}{r}-1\right)\geqslant 4,$$

тј. из (3) и (4) слиједе неједнакости (7) и (8).

Једнакост у (7) и (8) вриједи ако и само ако је $R=2r$, тј. ако је у питању једнакостранични троугао.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Arslanagić, Š., *Neke nejednakosti u vezi trougla*, Triangle, **2**, 4 (1998), 269–275.

[2] Arslanagić, Š., *O udaljenostima nekih značajnih točaka trokuta*, Matematičko-fizički list **51**, 1 (2000-01), 7–15.

[3] Bottema, O. and oth., *Geometric inequalities*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1969.