Мр Душка Пешић

ВИЗУЕЛНИ ПРИСТУП „ЕПСИЛОН-ДЕЛТА" ДЕФИНИЦИЈИ НЕПРЕКИДНОСТИ ФУНКЦИЈЕ У ТАЧКИ

1. Увод

После увода у појам непрекидности на примерима из живота, као и повезивања тих примера са појмом непрекидности функције [1], један од начина да се почне обрада ове наставне теме је давање саме дефиниције и њено анализирање, део по део, уз детаљно разјашњавање најмање прихваћених појмова.

„ε-δ дефиниција" се даје ако се непрекидност функције обрађује пре граничне вредности функције. Нарочито код ове дефиниције је обавезно коришћење илустративне методе уз употребу рачунара. На овако „за ученике тешко прихватљивим наставним темама" схвата се неопходност увођења рачунара у наставу математике [3]. Такође је битно да се почетни примери раде на најједноставнијим функцијама чији је график свим ученицима већ добро познат.

Предлог је да се на почетку часа напише дефиниција непрекидне функције у тачки x_0:

Дефиниција 1. Функција $f\colon D_f \to \mathbf{R}$, $D_f \subset \mathbf{R}$, непрекидна је у тачки $x_0 \in D_f$ ако важи

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D_f)(|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon).$$

Очито је да „читање" дефиниције траје сувише дуго да би се одржала пажња само слушајући текст дефиниције[1]. Потребно је делове из дефиниције представити тако да се различитим информацијама омогући да дођу у центар интересовања на различитим нивоима.

Дефиниција се због тога постепено анализира и даје се њена визуелно-методичка презентација.

Основни проблем у прихватању „ε-δ дефиниције" непрекидности функције у тачки је употреба квантификатора $\forall$ и $\exists$, ε-δ нотације, ознака апсолутне вредности као и других симбола релација и логичких везника, што код многих ученика

Рад је изложен на Републичком семинару о настави математике и рачунарства, одржаном у Новом Саду фебруара 2005. године

[1] „Функција *еф* је непрекидна у тачки *икс нула* из домена функције *еф* ако за свако епсилон веће од нуле постоји делта веће од нуле такво да за свако *икс* из домена функције *еф* важи да, ако је апсолутна вредност *икс* минус *икс нула* мања од делта, тада је и апсолутна вредност *еф од икс* минус *еф од икс нула* мања од епсилон" [D.Tall, *Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking*, International Congress of Mathematicians, Zürich, August, 1994.]

блокира могућност стварања одговарајуће „слике у глави“, односно „мисаоног модела“.

Из дефиниције 1 произлази да је потребно анализирати следеће:

1. тачку x_0 из домена функције f;
2. квантификаторе: $\forall$ и $\exists$;
3. симболе ε и δ;
4. неједнакости: $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
5. импликацију $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, и на крају
6. целу дефиницију.

2. Тачка у којој се испитује непрекидност

Овај део дефиниције је уједно и један од најбитнијих фактора за испитивање непрекидности неке функције. Ученици са правом у почетку сматрају да, на пример, функција $y = 1/(x^2 - 1)$, $x \neq \pm 1$, није непрекидна зато што има прекид на графику. Зато је важно да се овај део дефиниције издвоји и детаљно објасни на неким примерима, као што је урађено у раду [1].

Даље би се могло поновити и да је функција непрекидна на свом домену ако је она непрекидна у свакој тачки свог домена. Значи, у тачкама које нису у домену, непрекидност се не испитује (јер у тим тачкама није ни дефинисана). Међутим, код таквих функција можемо казати да се јавља „прекид на графику у некој тачки“, а разлог томе је што функција није дефинисана у тој тачки.

Дакле, пре анализе дефиниције, обавезно је задржати се на домену функције која се испитује. Битно је да ученици схвате да се непрекидност функције испитује само у оним тачкама које припадају области дефинисаности функције.

3. Квантификатори

Ученици саме квантификаторе лако разликују и препознају, али је потребно заједно са њима уочити и на примерима из живота разјаснити да је редослед квантификатора битан и да промена редоследа мења смисао саме дефиниције. На пример, можемо питати ученике да ли следеће реченице имају исто значење:

- „За сваког ученика четвртог рареда постоји неко место на факултету на које би се ученик могао уписати.“
- „За свако место на факултету постоји неки ученик четвртог разреда који би се могао на њега уписати.“
- „Постоји ученик четвртог разреда такав да би се он могао уписати на свако место на факултету.“
- „Постоји место на факултету на које би се могао уписати сваки ученик четвртог разреда.“

Ученици разумеју да се ове четири реченице разликују по смислу, а самим тим и да је редослед квантификатора битан.

Овде можемо детаљније обрадити дати пример тако што означимо са:

e – ученика четвртог разреда,

d – место на факултету, а са

A – тврђење да се ученик e може уписати на место d.

Уз помоћ наставника ученици долазе до следећих логичких формула:

- за прву реченицу – $(\forall e)(\exists d)\,A$ (примети се да вредност d зависи од вредности e);
- за другу реченицу – $(\forall d)(\forall e)\,A$ (примети се да вредност e зависи од вредности d);
- за трећу реченицу – $(\exists e)(\forall d)\,A$ (примети се да вредност e не зависи од вредности d);
- за четврту реченицу – $(\exists d)(\forall e)\,A$ (примети се да вредност d не зависи од вредности e).

Ученици се могу подсетити и формуле која представља запис реченице: „не постоји највећи природан број“. Ова реченица може другачије да се изрази и у виду реченице: „за сваки природан број, постоји природан број који је већи од њега“. Формални запис је

$$(\forall n \in \mathbf{N})(\exists m \in \mathbf{N})(m \geqslant n). \tag{$*$}$$

У овом случају избор броја m зависи од избора броја n, јер за *сваки* природан број се тражи *неки* природан број, који сваки пут може да има другу вредност.

Ако би се обрнуо редослед квантификатора у овој формули, добила би се формула

$$(\exists m \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(m \geqslant n), \tag{$**$}$$

која представља запис реченице која има управо супротно значење: „постоји највећи природан број“. У овом случају избор броја m не зависи од избора броја n јер треба да за одабрано m тврђење важи за свако n (тј. вредност броја m се само једном одабере).

Може се такође приметити да се и истинитосна вредност ове две формуле разликује.

Потребно је задржати се мало више на првој реченици, због редоследа квантификатора који може бити добар увод у почетак дефиниције која се испитује.

Ученици могу и сами да дају неке примере сличних реченица.

Како је ово прилика за наставнике да ученицима приближе математичку логику, са којом су се они сретали у току школовања, добро би било објаснити и чињеницу да фраза „бар један“ одговара негацији фразе „за сваки“. Да би се доказало да је реченица (формула) која садржи фразу „за сваки“ неистинита, довољно је наћи један пример за који та реченица није тачна. Тај пример се назива контрапример. То и објашњава чињеницу да се истинитосна вредност претходне две формуле $(*)$ и $(**)$ разликује.

4. Симболи ε и δ

Даље се прелази на коришћење симбола[2] ε и δ. Ученици су ознаку ε већ срели приликом обраде граничне вредности низа и треба их подсетити да је ε обично ознака за „мали“ позитиван реалан број.

Потребно је нагласити да се и са δ обично означава „мали“ позитиван реалан број.

Ове ознаке се најчешће користе код појма ε-околине и δ-околине неког броја. У средњој школи се под појмом околине неке тачке подразумева отворени интервал (типа (a, b)) који садржи ту тачку [5].

Због дефиниције је потребно повезати симбол ε са квантификатором $\forall$, као и симбол δ са квантификатором $\exists$, и на неки начин упутити ученике да запамте фразе:

1. „за свако епсилон“,
2. „постоји делта“.

Редослед ових фраза је такође битан, и важно је да се објасни да промена ε изазива промену δ (јер за свако ε постоји неко δ), тј. да δ зависи од ε.

Приметимо да се у литератури, понекад, користе и ознаке k и h. Како се у већини уџбеника јављају ознаке ε и δ, предлажемо да се баш та слова користе за даљи рад.

5. Неједнакости из дефиниције

Познато је да ученици (нарочито они којима математика није главно опредељење) тешко прихватају неједнакости $|x - x_0| < \delta$ и $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. То може бити због пропуста у претходном току школовања, али и због конфузије која настаје када виде велики број симбола (при чему се не зна које су константе а које променљиве), операција и релација.

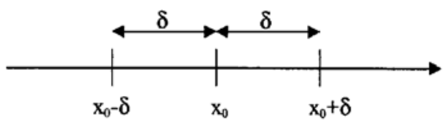
То показује да је неопходно и овим неједнакостима прићи поступно, да би их правилно схватили и прихватили.

5.1. Прва неједнакост. Прва неједнакост из импликације у дефиницији је $|x - x_0| < \delta$. Нека је x_0 дати реалан број. Посматрајмо произвољну околину око тачке x_0. Тај интервал (сл. 1) садржи све оне реалне бројеве чије је растојање од тачке x_0 мање од неког броја, који означимо са δ (добро је већ овде повезати симбол δ са променљивом x). То значи да, ако x припада δ-околини тачке x_0, важи неједнакост $|x - x_0| < \delta$. Треба објаснити да се ова неједнакост може другачије записати и помоћу двоструке неједнакости $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, као и у облику припадности интервалу $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$[3].

---

[2] Ознаке ε и δ у дефиницјама лимеса и непрекидности први је увео француски математичар Коши 1821. године.

[3] „За ученике је можда јаснији запис помоћу интервала, али за каснији рад предност има запис помоћу неједнакости јер боље описује појам удаљености који је битан у развоју теорије метричких простора. Значи да је δ мера „близине“ броју x_0 (има карактер близак параметру).“ [J. Mamona-Downs, *Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence*, Educational Studies in Mathematics 48 (2001), 259–288.]

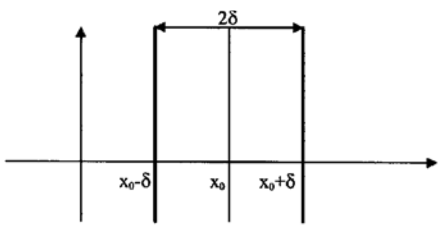


Сл. 1

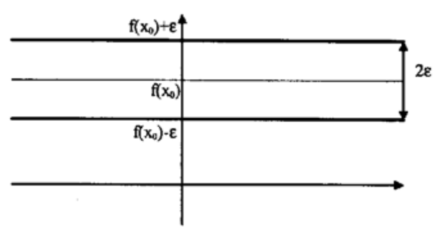
Битно је овде нагласити да се посматрају само оне вредности променљиве x које, осим интервалу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, припадају и домену функције f, тј. $x \in D_f \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$ (објаснити да то следи из фразе $(\forall x \in D_f)$ која се налази у дефиницији).

5.2. Веза између неједнакости. Посебну пажњу треба обратити на повезаност ових неједнакости функцијом f. Зато је потребно прећи на дводимензионалну слику у Декартовом правоуглом координатном систему, где посматрамо тачке равни чије су координате $(x, f(x))$, $x \in D_f$ и $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in D_f$.

Тачке чије x-координате задовољавају релацију $|x-x_0|<\delta$ припадају вертикалној траци ширине 2δ, која је нормална на x-осу (сл. 2), лево и десно од одговарајуће праве (у овом случају праве $x=x_0$). Добро је повезати δ са ширином вертикалне траке.

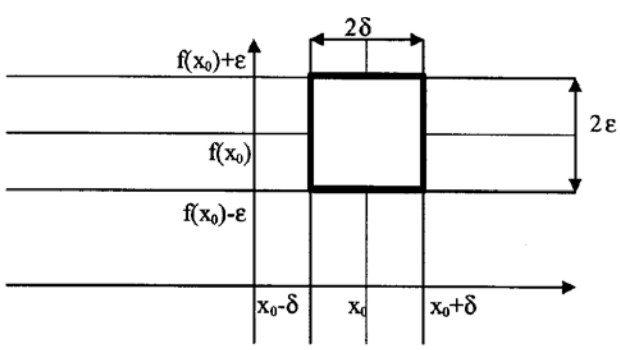


Сл. 2



Сл. 3

Аналогно, тачке чије y-координате задовољавају неједнакост $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ припадају бесконачној траци ширине 2ε, која је нормална на y-осу (паралелна са x-осом), изнад и испод праве $y=f(x_0)$ (сл. 3). Овде повезујемо ε са ширином хоризонталне траке.



Сл. 4

Сада би требало питати ученике која област се добије када су обе неједнакости задовољене. Они без проблема препознају да се тада одговарајуће тачке налазе у правоугаонику који се добија у пресеку ове две траке – хоризонталне и вертикалне (сл. 4), а чије су димензије 2δ и 2ε.

Значи, само оне тачке чије координате задовољавају обе неједнакости припадају добјеном правоугаонику. Координате тачака које нису у правоугаонику, а припадају вертикалној траци, задовољавају само прву неједнакост, а не и другу. Координате тачака које нису у правоугаонику, а припадају хоризонталној траци, задовољавају само другу неједнакост, а не и прву. Остале тачке равни, које не припадају ни вертикалној ни хоризонатлној траци, имају координате које не задовољавају ниједну од датих неједнакости.

6. Импликација из дефиниције

Како неједнакости у дефиницији нису везане конјункцијом, већ импликацијом ($|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$), потребно је подсећање на истинитосну вредност ове логичке формуле, као и на неке познате таутологије.

Ученици се срећу са импликацијом $p \implies q$ још у току првог разреда средње школе. Импликација се често користи и у току следећих година школовања.

Пре свега се нагласи да ова формула није тачна једино у случају да је p тачно а q нетачно (дакле, не важи да из тачног следи нетачно). У свим осталим случајевима ова формула је тачна.

Могу се ученици подсетити и на следеће две таутологије:

$(p \implies q) \iff (\neg p \vee q)$ – закон уклањања импликације;

$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p)$ – закон контрапозиције.

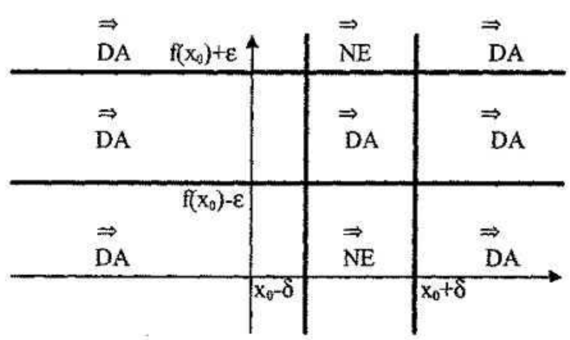
Даље би се могло поставити питање:

„Шта значи импликација $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$“ ?

Ако се означи тврђење $|x - x_0| < \delta$ са p, а тврђење $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ са q, тада се, користећи објашњења тих неједнакости из претходног одељка, ова исказна слова могу визуелно представити и повезати са реченицама:

p – „тачка $(x, f(x))$ припада вертикалној траци око праве $x = x_0$“,

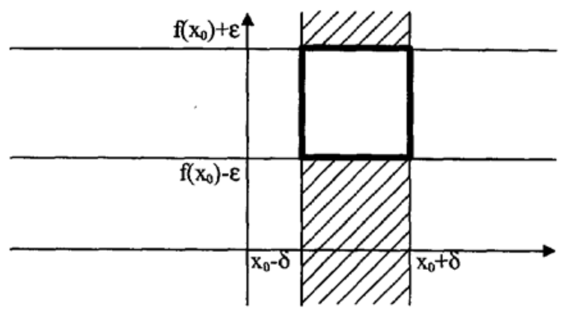
q – „тачка $(x, f(x))$ припада хоризонталој траци око праве $y = f(x_0)$“.



Сл. 5

Како је формула $p \implies q$ нетачна само ако је p тачно и q нетачно, визуелно значи да импликација $|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ није тачна само за оне тачке равни које припадају вертикалној, а не припадају хоризонталној траци (на слици 5 то су делови равни обележени са НЕ). У свим осталим деловима равни се налазе тачке за које је посматрана импликација тачна (делови равни обележени са ДА).

Ученици радо прихватају ово графичко објашњење када та импликација није задовољена, а када јесте. Помоћу слике 6 се објасни да све тачке које припадају ишрафираној области имају координате за које посматрана импликација није тачна. Сада је лако проверити, посматрајући график произвољне функције, да ли та импликација јесте или није тачна за све тачке графика, за произвољне вредности ε и δ.



Сл. 6

Уколико график неке функције има тачака које припадају ишрафираним деловима равни, тада за такву функцију постоје вредности x из њеног домена за које посматрана импликација није тачна.

Нека од визуелних објашњења импликације $|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, исказана речима (по аналогији са уводним објашњењима) које ученици дају сами (или уз помоћ наставника) су следећа.

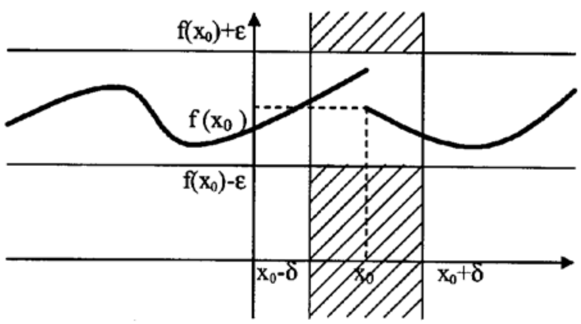
- Ако је тачка графика функције f у вертикалној траци ширине 2δ, тада је та тачка и у хоризонатлној траци ширине 2ε (док обратно не мора да важи). Ово би одговарало случају када је p тачно и q тачно.
- Не сме постојати ниједна тачка графика функције f из вертикалне траке, таква да није у хориозонталној траци (не сме бити тачака у ишрафираној области).
- Ако цео правоугаоник занемаримо (прекријемо или офарбамо), остатак вертикалне траке не сме садржати ниједну тачку графика те функције, да би дата импликација била тачна.
- График одговарајуће функције $y=f(x)$ не сме имати ниједну тачку која припада вертикалној траци, а да не припада добијеном правоугаонику.
- Уколико тачка графика функције f не припада хоризонталној траци, онда није ни у вертикалној траци. То тврђење одговара формули $\neg q \implies \neg p$.

- Или тачка графика функције f није у вертикалној траци, или је у хоризонталној траци. То тврђење одговара формули $\neg p \vee q$.
- Уколико тачка графика функције f не припада вертикалној траци, ова импликација је сигурно тачна. То одговара случају када је p нетачно, тада је импликација $p \implies q$ увек тачна. Закључак овог тврђења је да нас интересују само оне тачке графика функције f које припадају, не само домену D_f, него и вертикалној траци.

Следећи примери показују да сама импликација

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(без пратећих услова са квантификаторима) није довољна за непрекидност функције у тачки x_0.

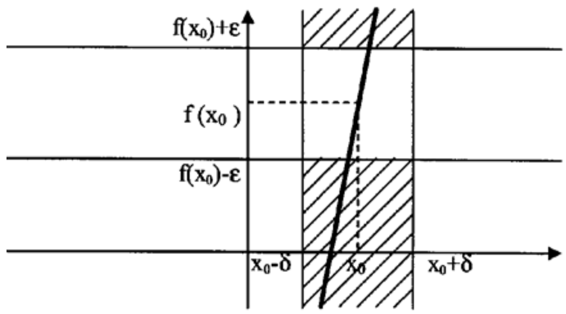


Сл. 7

Пример 1. Слика 7 приказује график функције $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < x_0, \\ f_2(x), & x \geqslant x_0, \end{cases}$ где је $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \neq f_2(x_0)$. За ову функцију, *и изабрано* ε, наведена импликација јесте задовољена у свим тачкама графика (иако функција има прекид). Види се, међутим, да би се, смањивањем вредности ε (сужавањем хоризонталне траке), у једном моменту дошло до ситуације да постоје тачке на графику функције f чије координате припадају вертикалној траци, а не припадају хоризонталној траци. За такве тачке импликација није тачна. Дакле, не важи импликација за свако ε, него за неке вредности ε. Такође се може приметити да постоји нека вредност за ε таква да, било каква промена вредности δ, не може довести до тога да импликација буде тачна у свим тачкама графика те функције. Значи да се мора испитивати тачност импликације за свако $\varepsilon > 0$.

Пример 2. Слика 8 приказује график функције $y = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, за коју ова импликација није задовољена у неким тачкама графика те функције, *за фиксирано* δ (иако је функција непрекидна).

Смањивањем вредности δ (сужавањем вертикалне траке) у једном моменту би се дошло до ситуације када та импликација јесте тачна за све тачке графика те функције (да вертикална трака нема тачака графика изван правоугаоника). Значи



Сл. 8

да се за ову вредност ε може наћи δ такво да импликација јесте тачна. Примети се да се за свако ε може наћи δ, такво да је импликација тачна у свим тачкама домена те функције. То значи да је за испитивање непрекидности функције довољно да за „свако ε постоји неко δ" за које је импликација тачна, тј. испред импликације морају стајати следећа ограничења: $(\forall\varepsilon)(\exists\delta)$. Како се овде говори о ширини хоризонталне и вертикалне траке, логично је да су бројеви ε и δ позитивни.

Значи да је врло битно извести следећи закључак.

- Сама импликација *није ни неопходна ни довољна* да осигура непрекидност функције, јер постоје непрекидне функције за које импликација није тачна, као и прекидне функције за које импликација јесте тачна. То значи да се, ако се жели доћи до дефиниције непрекидности функције, морају увести још нека ограничења (претходна објашњења нас наводе на ограничења за вредности ε и δ).

7. „ε-δ" дефиниција

Када ученици добро прихвате значење свих појединачних делова дефиниције, ти делови се могу међусобно повезати, разјаснити значење тих веза, и поново, са разумевањем, заједно са ученицима, може се доћи до коначне дефиниције.

Повезују се следеће формуле реченицама:

- $(\forall\varepsilon > 0)$ – за сваку хоризонталну траку ширине 2ε (која садржи праву $y = f(x_0)$),
- $(\exists\delta > 0)$ – постоји вертикална трака ширине 2δ (која садржи праву $x = x_0$),
- $(\forall x \in D_f)$ – за сваку тачку x домена функције f,
- $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ – ако је тачка $(x, f(x))$ из вертикалне траке, тада је она и из хоризонталне траке.

Значи да формула $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D_f)(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$ може речима да се „прочита" на следећи начин:

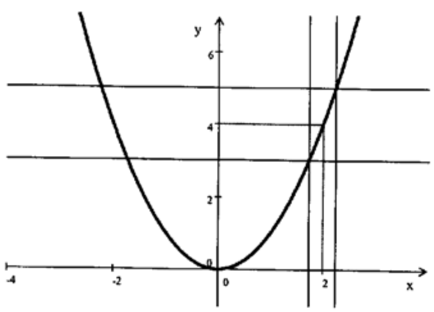
- за сваку $(\forall)$ хоризонталну траку произвољне ширине (2ε) (која садржи праву $y = f(x_0)$), постоји $(\exists)$ и вертикална трака одговарајуће ширине (2δ) (која садржи праву $x = x_0$), таква да за сваку вредност x из домена функције f $(\forall x \in D_f)$, ако је тачка $(x, f(x))$ из вертикалне траке $(|x - x_0| < \delta)$ (тј. ако у тој траци има тачака графика функције f), тада је тачка и из хоризонталне траке ($|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$) (тј. тај део графика припада посматраном правоугаонику).

Уколико је ова формула увек тачна (за све вредности ε и за сваку тачку x_0 из домена функције f), тада је та функција непрекидна на свом домену.

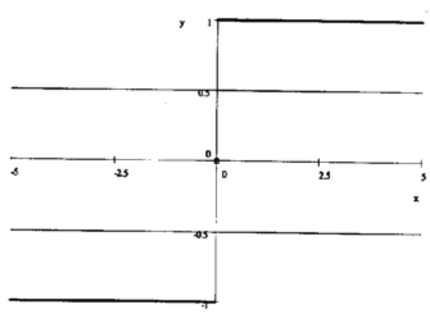
Добро је ово илустровати на бар два примера, таква да:

1. функција задовољава услове дефиниције (јесте непрекидна) у свакој тачки домена;
2. функција не задовољава услове дефиниције (није непрекидна) у некој тачки домена.

Пример 3. Како је ученицима квадратна парабола један од најпознатијих графика, није лоше да се баш на тој функцији изврше детаљније анализе. Анимација би овде била од значајне користи, да се види како промена ε повлачи за собом промену δ. На слици 9 дат је график функције $y = x^2$, и анализа непрекидности те функције у тачки $x_0 = 2$ за $\varepsilon = 1$. Наставити тај поступак заједно са ученицима, и закључити да, ма како мало ε одабрали, увек се може наћи δ такво да у хоризонталној траци нема тачака графика те функције изван правоугаоника (тј. функција је по дефиницији непрекидна у тој тачки).



Сл. 9

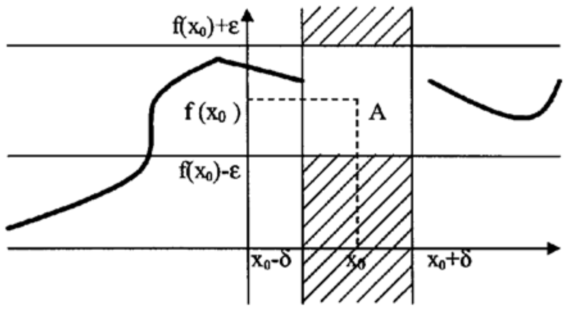


Сл. 10

Пример 4. Ученици се често срећу са знаковном функцијом $y = \operatorname{sgn} x$, па је један предлог да се исппитује непрекидност ове функције у тачки 0. Довољно је показати да постоји неко ε за које не постоји δ такво да је импликација $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ увек тачна. На слици 10 је дат график те функције. Види се да за $\varepsilon = 0{,}5$ не постоји такво δ за које важе сви услови из дефиниције непрекидности у тачки $x_0 = 0$, тј. увек би постојао део графика те функције који би припадао вертикалној траци око y-осе, а не би припадао и хоризонталној траци, ма како мале ширине она била (тј. функција по дефиницији није непрекидна у тој тачки).

8. Изоловане тачке

Може се, после ових објашњења, прокоментарисати још једна интуитивно не сасвим јасна чињеница. То је случај изолованих тачака домена. У тим тачкама се увек може наћи такво δ, да вертикална трака садржи само ту тачку, тј. да је импликација увек тачна (за свако ε). На слици 11 се види да координате изоловане тачке A задовољавају посматрану импликацију, а како је то и једина тачка из вертикалне траке, импликација је тачна и за координате свих осталих тачака те функције.



Сл. 11

Ово је битно за касније објашњење да је функција непрекидна у свим изолованим тачкама.

9. Примери неких „чудних“ функција

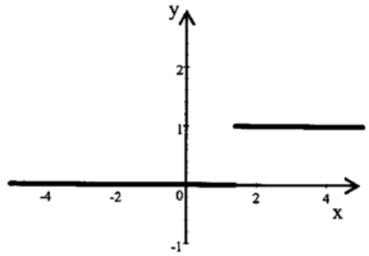
Из искуства би се могло рећи да ученици често замене појам непрекидности функције неким од следећих појмова:

1. непрекидност графика функције („ако је график функције нацртан у једном потезу, онда је то непрекидна функција“, „ако се график функције не може нацртати, онда то није непрекидна функција“);
2. начином задавања функције („непрекидне функције су задате једном формулом, док функције задате из делова нису непрекидне“);
3. домен функције („ако је домен цео скуп **R**, онда је функција непрекидна“);
4. диференцијабилност функције („непрекидне функције су и диференцијабилне“).

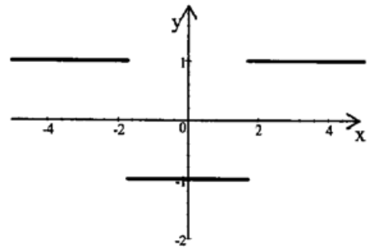
Зато је добро дати примере још неких функција које имају особине које нису интуитивно јасне.

Пример 5. Дата је функција $f\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{за } x < 0 \vee x^2 < 2, \\ 1, & \text{за } x > 0 \wedge x^2 > 2 \end{cases}$ (сл. 12)[4].

[4] „Веома је тешко формирати задовољавајућу менталну слику рационалне уместо реалне линије. Ако се посматра функција само на скупу рационалних бројева која је формално непрекидна функција, долази се у конфликт са свим деловима 'концепта слике' који су помињани.“ – D. Tall, A. Vinner, *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*, Education Studies in Mathematics, **12** (1981), 159–169.



Сл. 12



Сл. 13

Види се да ова функција има прекид на графику, иако је формално непрекидна у свакој тачки из домена. Ово је зато што је прекид на графику у тачки $x_0 = \sqrt{2}$, а ова тачка не припада домену те функције јер $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

Пример 6. Посматра се функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1-x, & x \in \mathbf{I}. \end{cases}$

Ова функција је непрекидна у тачки $x_0 = 1/2$, иако се график ове функције не може нацртати, а и функција је задата по деловима.

Пример 7. Посматра се функција $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x^2 > 3, \\ -1, & x^2 \leqslant 3 \end{cases}$ (сл. 13).

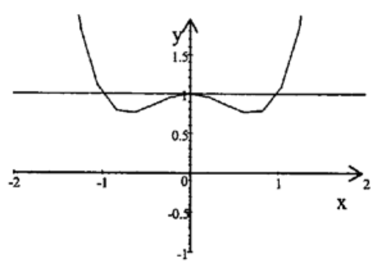
И ово је пример функције која је формално непрекидна иако има два прекида на графику, зато што тачке $\pm\sqrt{3}$ не припадају домену те функције.

Пример 8. Посматра се функција $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2(x^2-1)+1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & x \in \mathbf{I} \end{cases}$$

(сл. 14).

Ова функција је непрекидна у три тачке: -1, 0 и 1. Она је чак и диференцијабилна у тачки $x_0 = 0$.



Сл. 14

Напомена. Дефиниција непрекидности функције у тачки обрађена у овом раду је уједно и једна од најкомпликованијих дефиниција за ученике, и уколико се правилно обради и разуме, лако ће се касније усвојити и друге дефиниције у којима се појављују квантификатори $\forall$ и $\exists$, грчка слова ε и δ, као и ознаке апсолутне вредности и други симболи релација и логичких везника. Потребно је ослањати се на „мисаону слику“ коју ученици носе у себи, и многе појмове интуитивно увести. Такође је неопходно јасно ставити на знање где могу наступити проблеми и заједно са ученицима створити тачну представу о непрекидним функцијама.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ђ. Такачи, Д. Пешић, *Непрекидност функције у настави математике – метода визуелизације*, Настава математике **XLIX**, 3–4 (2004), 30–40.

[2] Đ. Takači, D. Pešić, J. Tatar, *An introduction to the continuity of functions using Scientific Workplace*, The Teaching of Mathematics, **VI**, 2 (2003), 105–112.

[3] Dj. Takači, J. Tatar, D. Pešić, *Calculus on computer*, PAMM, Budapest, 2003.

[4] М. Обрадовић, Д. Георгијевић, *Математика са збирком задатака за четврти разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.

[5] А. Золић, З. Каделбург, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 1*, 3. изд, Круг, Београд, 2003.

[6] Đ. Takači, A. Takači, *Zbirka zadataka iz analize I*, prvi deo, Institut za matematiku PMF-a, Novi Sad, 1997.

[7] D. Tall, M. Bakar, *Students' mental prototypes for functions and graphs*, Proceedings of PME 15, Assisi, **1** (1991), 104–111.

[8] S. Kurepa, *Matematička analiza 2, Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1977.

[9] J. Schmeelk, Dj. Takači, A. Takači, *Elementary Analysis through Examples and Exercises*, Kluwer Academic Publishers, 1995.

[10] D. Tall, *Understanding the processes of advanced mathematical thinking*, International Congress of Mathematicians, Zürich, August, 1994.