Милан Живановић

ИНВАРИЈАНТНА ПРЕСЛИКАВАЊА ПИТАГОРИНИХ ТРОЈКИ[1]

Под Питагориним тројкама (бројевима) подразумевају се природна решења једначине

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Тројка природних бројева (x, y, z) која задовољава једначину (1) назива се основном Питагорином тројком ако и само ако су бројеви x, y и z узајамно прости. Притом, један од бројева x, y мора бити паран, а други непаран. У математичкој литератури (в. нпр. [1]) познато је тврђење

Теорема 1. *Тројка (x, y, z) је основна Питагорина тројка (где је x непаран, а y паран) ако и само ако постоје природни бројеви m и n, такви да је $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ и $z = m^2 + n^2$, при чему је $m > n$,* НЗД$(m, n) = 1$ *и m и n су различите парности.*

Овде ћемо дати једно другачије решење једначине (1) и услове под којима ће Питагорина тројка бити основна.

Трансформацијом

$$x = \alpha + \gamma, \quad y = \beta + \gamma, \quad z = \alpha + \beta + \gamma \tag{2}$$

једначина (1) се своди на једначину

$$\gamma^2 = 2\alpha\beta. \tag{3}$$

Пре него што пређемо на решавање једначине (3), формулишимо једно помоћно тврђење.

Теорема 2. *Решење (x, y, z) једначине (1) је основно ако и само ако су у одговарајућем решењу (α, β, γ) једначине (3) бројеви α, β, γ узајамно прости.*

Обе импликације се лако доказују применом контрапозиције. Такође, очигледно је да су бројеви α, β, γ у решењу једначине (3) узајамно прости ако су α и β узајамно прости и различите парности. Пређимо сад на решавање једначине (3).

Пошто је десна страна једначине паран број, то мора бити и лева, односно број γ. Нека је

$$\gamma = 2^k \prod_{i \in I} p_i^{k_i}; \qquad k, k_i \in \mathbf{N}, \quad p_i \in P \setminus \{2\}, \quad I = \{1, 2, \ldots, r\}$$

[1] Уводни део овог чланка објављен је у часопису *Тангента*, **38/2**, 2004/05.

канонска факторизација броја γ, где су: $\mathbf{N}$ скуп природних бројева, P скуп простих бројева и I коначан скуп индекса. Уврштавањем тако записаног γ у једначину (3), после скраћивања са 2, она добија облик

$$2^{2k-1}\prod_{i\in I}p_i^{2k_i}=\alpha\beta.$$

Да би α и β били узајамно прости, морају садржати различите просте делиоце броја γ. Не умањујући општост, можемо претпоставити да је β парно. У том случају α се може добити као производ извесног броја делилаца броја γ, различитих од 2, тј.

$$\alpha=\prod_{i\in J}p_i^{2k_i},\quad J\subset I,\quad \text{и}\quad \alpha=1\quad \text{ако је } J=\varnothing.$$

Јасно је да решавана једначина има онолико решења колико скуп I има подскупова. Сва решења једначине (3) дата су као

$$\left(\alpha=\prod_{i\in J}p_i^{2k_i},\ \beta=2^{2k-1}\prod_{i\in I\setminus J}p_i^{2k_i},\ \gamma=2^k\prod_{i\in I}p_i^{k_i}\right),\quad J\in P(I),\tag{4}$$

где је $P(I)$ партитивни скуп скупа индекса I.

Тиме смо доказали тврђење

Теорема 3. *Сваки паран број γ са r простих делилаца различитих од 2, помоћу формула (4) и трансформације (2) генерише тачно 2^r различитих основних Питагориних тројки.*

У наредној табели дата је илустрација претходног тврђења за неке вредности парног броја γ.

γ	α	β	x $\alpha+\gamma$	y $\beta+\gamma$	z $\alpha+\beta+\gamma$	r	број решења 2^r
2	1	2	3	4	5	0	1
4	1	8	5	12	13	0	1
6	1 9	18 2	7 15	24 8	25 17	1	2
8	1	32	9	40	41	0	1
10	1 25	50 2	11 35	60 12	61 37	1	2
...							
30	1 9 25 225	450 50 18 2	31 39 55 255	480 80 48 32	481 89 73 257	2	4

Да бисмо успоставили везу између два различита облика решења једначине (1), посматрајмо исту Питагорину тројку генерисану на два различита начина. Нека

$$(\alpha+\gamma,\beta+\gamma,\alpha+\beta+\gamma)=(\alpha+\sqrt{2\alpha\beta},\beta+\sqrt{2\alpha\beta},\alpha+\beta+\sqrt{2\alpha\beta})$$

и

$$(m^2-n^2,2mn,m^2+n^2)$$

представљају исту Питагорину тројку. Њиховим изједначавањем добија се систем једначина

$$m^2-n^2=\alpha+\sqrt{2\alpha\beta},\quad 2mn=\beta+\sqrt{2\alpha\beta},\quad m^2+n^2=\alpha+\beta+\sqrt{2\alpha\beta},$$

одакле

$$2m^2=2\alpha+\beta+2\sqrt{2\alpha\beta},\quad 2n^2=\beta,$$

тј.

$$m^2=\alpha+\frac{\beta}{2}+\sqrt{2\alpha\beta},\quad n^2=\frac{\beta}{2}.$$

Решење система

$$m=\sqrt{\alpha}+\frac{\sqrt{2\beta}}{2},\quad n=\frac{\sqrt{2\beta}}{2},$$

као и инверзна веза

$$\alpha=(m-n)^2,\quad \beta=2n^2$$

дају везу између параметара који генеришу исту Питагорину тројку на два различита начина.

2. Инваријантна пресликавања Питагориних тројки

Поставимо питање одређивања линеарних пресликавања у односу на које је скуп Питагориних тројки инваријантан. Дакле, тражимо таква линеарна пресликавања при којима је слика Питагорине тројке такође Питагорина тројка.

Очигледно решење овог проблема представљају хомотетије са природним коефицијентом, односно пресликавања типа

$$x_1=kx,\quad y_1=ky,\quad z_1=kz,$$

где је k природан број. Међутим, оваква трансформација основну Питагорину тројку пресликава у изведену. Да бисмо нашли пресликавања у односу на која су инваријантне основне Питагорине тројке, поступићемо на следећи начин.

Због симетричности решења једначина (1) и (3) у односу на x, y, односно α, β, закључујемо да матрица линеарног пресликавања мора бити симетрична. Ради лакшег рачунања, договоримо се да и тројку $(0,1,1)$ (мада садржи и нулу) сматрамо основним решењем једначине (1) – она се такође мора пресликати у основну Питагорину тројку. Тражећи основну Питагорину тројку у облику датом у (2), добијамо матричну једначину по непознатој квадратној матрици L трећег реда

$$L\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha+\gamma\\\beta+\gamma\\\alpha+\beta+\gamma\end{bmatrix},$$

уз услов да је $\gamma^2=2\alpha\beta$ и да су α и β су узајамно прости и различите парности. Решење ове једначине је облика

$$L=\begin{bmatrix}\beta&\alpha&\gamma\\\alpha&\beta&\gamma\\\gamma&\gamma&\alpha+\beta\end{bmatrix}. \tag{5}$$

Проверимо прво да ли је у трансформацији L слика Питагорине тројке поново Питагорина тројка. Дакле, нека је

$$\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}=L\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},$$

тј.

$$\begin{aligned}x_1&=\beta x+\alpha y+\gamma z=\alpha_1+\gamma_1,\\y_1&=\alpha x+\beta y+\gamma z=\beta_1+\gamma_1,\\z_1&=\gamma x+\gamma y+(\alpha+\beta)z=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1.\end{aligned} \tag{6}$$

Тада је

$$x_1^2+y_1^2-z_1^2=(\beta x+\alpha y+\gamma z)^2+(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-(\gamma x+\gamma y+(\alpha+\beta)z)^2=0,$$

јер је $x^2+y^2-z^2=0$ (мешовити сабирци се потиру). Дакле, $x_1^2+y_1^2=z_1^2$, тј. Питагорина тројка се слика у Питагорину тројку.

Да ли је добијена тројка основна? Па, биће ако су α_1 и β_1 узајамно прости и различите парности. Коришћењем веза инверзних везама (2) добија се да је

$$\beta_1=z_1-x_1,\quad \alpha_1=z_1-y_1.$$

После једноставних трансформација имаћемо:

$$\begin{aligned}\beta_1&=(\gamma x+\gamma y+(\alpha+\beta)z)-(\beta x+\alpha y+\gamma z)=\gamma(x+y-z)+\alpha(z-y)+\beta(z-x)\\&=\gamma^2+\alpha^2+\beta^2=2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2,\\\alpha_1&=(\gamma x+\gamma y+(\alpha+\beta)z)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\gamma(x+y-z)+\alpha(z-x)+\beta(z-y)\\&=\gamma^2+2\alpha\beta=4\alpha\beta.\end{aligned}$$

Дакле, α_1 је парно, а β_1 је непарно, због различите парности α и β; даље, ниједан од делилаца α_1 (а то су делиоци од α и β) не дели β_1, јер би иначе било НЗД$(\alpha,\beta)\neq 1$, супротно претпоставци. Значи, α_1 и β_1 су узајамно прости и различите парности, па је и Питагорина тројка (6) основна. Доказали смо да је скуп основних Питагориних тројки инваријантан у односу на линеарно пресликавање чија је матрица L.

Пример 1. Из напред наведене табеле изаберимо: $\gamma = 6$, $\alpha = 9$, $\beta = 2$. У том случају је $L = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 9 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 11 \end{bmatrix}$. При том се, на пример, тројка $(3, 4, 5)$ пресликава у тројку $(72, 65, 97)$, јер је

$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 9 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 65 \\ 97 \end{bmatrix}$$

и важи $72^2 + 65^2 = 97^2$.

Приметимо да је и композиција произвољна два овако дефинисана пресликавања такође пресликавање у односу на које је скуп Питагориних тројки инваријантан. Докажимо да је и оно представљено матрицом типа (5). Нека су дата два таква пресликавања, L_1 и L_2. Матрица њихове композиције добија се као

$$\begin{bmatrix} \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \alpha_2 + \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \alpha_1 + \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & A & \Gamma \\ A & B & \Gamma \\ \Gamma & \Gamma & \Delta \end{bmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} A &= \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \gamma_1\gamma_2, \\ B &= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2, \\ \Gamma &= \gamma_1(\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2(\alpha_1 + \beta_1) \\ \Delta &= (\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) + 2\gamma_1\gamma_2. \end{aligned}$$

Да би овакво пресликавање било у класи дефинисаној релацијом (5), морају бити задовољене једнакости:

$$\Delta = A + B, \qquad \Gamma^2 = 2AB.$$

Прва једнакост се доказује једноставно:

$$A+B = (\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1+\gamma_1\gamma_2)+(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2) = (\alpha_1+\beta_1)(\alpha_2+\beta_2)+2\gamma_1\gamma_2 = \Delta.$$

Друга једнакост следи из

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= \gamma_1^2(\alpha_1 + \beta_2)^2 + 2\gamma_1\gamma_2(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) + \gamma_2^2(\alpha_1 + \beta_1)^2 \\ &= 2(\alpha_1\beta_1\alpha_2^2 + \alpha_1\beta_1\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2\alpha_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2\alpha_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_1\alpha_2 + \gamma_1\gamma_2\beta_1\beta_2 \\ &\qquad + \alpha_2\beta_2\alpha_1^2 + \alpha_2\beta_2\beta_1^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2) \\ &= 2(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \gamma_1\gamma_2)(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 2AB. \end{aligned}$$

Тиме смо доказали тврђење

Теорема 4. *Композиција два инваријантна пресликавања типа (5) у односу на основне Питагорине тројке, такође је инваријантно пресликавање типа (5) у односу на основне Питагорине тројке.*

Ако, дакле, са $\mathcal{L}$ означимо скуп линеарних пресликавања типа (5), а са $\circ$ композицију пресликавања, тада закључујемо да је $(\mathcal{L}, \circ)$ комутативан групоид с јединицом. Та структура није група. Наиме, матрица L^{-1}, инверзна матрици L, је

$$L^{-1} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \begin{bmatrix} \beta & \alpha & -\gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ -\gamma & -\gamma & \alpha+\beta \end{bmatrix},$$

дакле, она има облик као и матрица L, али одговарајући параметри $\alpha' = \dfrac{\alpha}{(\alpha-\beta)^2}$, $\beta' = \dfrac{\beta}{(\alpha-\beta)^2}$ и $\gamma' = -\dfrac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}$ не морају да буду цели бројеви. Но, ипак се свака основна Питагорина тројка (x, y, z) може добити помоћу

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где је $L = \begin{bmatrix} \beta & \alpha & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{bmatrix}$, а бројеви α, β, γ задовољавају једнакост (3), при чему су α и β узајамно прости и различите парности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, 4. изд, Друштво математичара Србије, 2004.