Владимир Балтић

РАЗЛИЧИТИ МЕТОДИ РЕШАВАЊА ГЕОМЕТРИЈСКОГ ПРОБЛЕМА

Лепота математике се огледа у различитим путевима за решавање проблема. Наставници и професори би требало велики број задатака да решавају на неколико различитих начина, да би ученици видели да су неколико наизглед неповезаних области, међусобно везане преко датог задатка. Када ме ученици (као и студенти) питају зашто решавамо један задатак на два, три или понекад и више начина, често им дам следећи пример (који може и сликовито да дочара, као и да побољша атмосферу на часу).

Замислите боксера који зна само један ударац, нпр. директ. Он је савршено увежбао тај ударац, али не зна ниједан други. Када изађе у ринг, искусан противник ће то веома брзо приметити и блокираће све његове ударце. Али, да он зна и кроше и аперкат, сигурно би могао очекивати бољи резултат. Иста ситуација је и у математици. Ако знамо више различитих метода, дати проблем можемо напасти са разних страна, те су нам стога веће шансе да га савладамо.

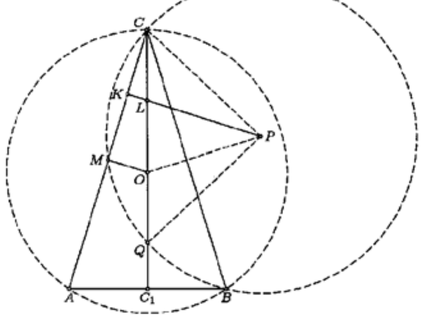
Овде ћемо се осврнути на решавање другог задатка са Осме јуниорске балканске математичке олимпијаде (одржане у Новом Саду од 26. јуна до 1. јула 2004. године) и то помоћу неколико суштински различитих геометријских метода, као и помоћу тригонометрије, аналитичке геометрије и комплексних бројева. Задатак гласи:

> *Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао, $AC = BC$, нека је M средиште дужи AC и нека је l права која пролази кроз тачку C а ортогонална је на AB. Кружница кроз B, C и M сече l у тачкама C и Q. Изразити полупречник круга описаног око троугла ABC преко $m = CQ$.*

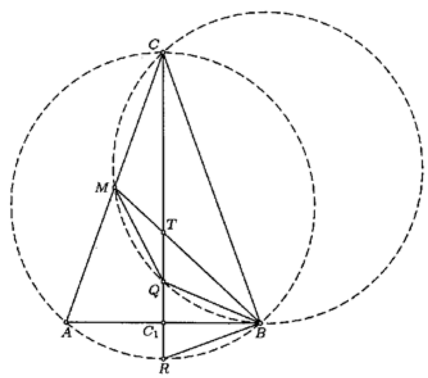
Задатак је предлог Бугарске. Од 69 такмичара, потпуно тачно (за 10 поена) решило га је 33 такмичара (9 од 12 наших, свих 6 Румуна, 6 од 7 Бугара, 3 од 6 Македонаца, 3 од 4 Казахстанца, 2 од 6 Молдаваца, 2 од 6 Турака, један Грк и једна Босанка). Само један ученик је имао непотпуно решење са 8 поена, док су остали имали 6 поена или мање. Ништа значајније на задатку није урадило 20 ученика (0 поена је имало 6 такмичара, а 1 поен њих 14). Просек поена је био 6,029.

I (званично решење). Означимо са P центар кружнице кроз тачке B, C и M, сл. 1. Нека је K средиште дужи MC. Тада је $\triangle KPC \cong \triangle KPM$ (имају све три странице једнаке), а одатле добијамо да је $\angle CKP = \angle MKP = 90^\circ$, односно $KP \perp CM$. Аналогно је и $MO \perp CA$, што нам даје $KP \parallel MO$. Означимо са L пресек правих l и KP. Како је K средиште дужи MC, из Талесове теореме примењене на сличне троуглове $\triangle CKL$ и $\triangle CMO$, добијамо да је L средиште дужи OC, тј. $OL = CL$. Како и O и P припадају симетрали дужи BC, имамо да је $OP \perp BC$. Сада имамо следеће једнакости углова са нормалним крацима: $\angle KLC = \angle BAC = \alpha$ и $\angle POC = \angle ABC = \alpha$, што нас са једнакошћу унакрсних углова $\angle KLC = \angle POL$ води до чињенице де је троугао OPL једнакокрак, тј. $PO = PL$. Сада из подударности троуглова $\triangle CLP \cong \triangle QOP$ (из једнакокраких троуглова $\triangle OLP$ и $\triangle QCP$ добијамо једнакости свих одговарајућих углова, као и $OP = OL$ и $QP = CP$) добијамо да важи $CL = QO$, што нам са $OL = CL$ коначно даје $CO = \frac{2}{3}CQ$, односно $r = \frac{2}{3}m$.

Кључ за бодовање овог задатка (који је установила комисија) био је следећи: 1 поен за увођење тачке K, 1 поен за $KP \parallel MO$, 2 поена за доказ да је L средиште OC, 3 поена за доказ да је $\triangle OPL$ једнакорак, 2 поена за $CL = QO$ и 1 поен за коначан резултат. Међутим, нико од такмичара није задатак решавао на овај начин.



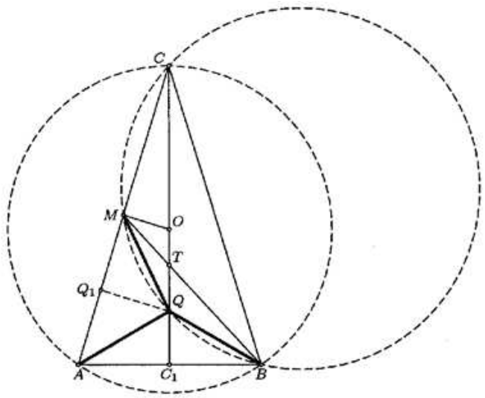
Сл. 1



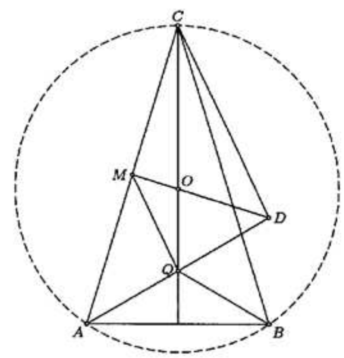
Сл. 2

II. Нека је CR пречник кружнице описане око $\triangle ABC$, T тежиште $\triangle ABC$ и C_1 средиште странице AB, сл. 2. Из сличности $\triangle CBP \sim \triangle CC_1B$ (један угао им је $\angle RCB$, а други је 90°) следи $\boxed{CB^2 = CC_1 \cdot CP}$. Из подударности $\triangle ACC_1 \cong \triangle BCC_1$ ($AC = BC$, $C_1A = C_1B$, $\angle CAB = \angle CBA$) следи $\angle ACR = \angle BCR$, а из тетивног четвороугла $MCBQ$ следи $\angle MBC = \angle MQC$. Одатле имамо сличност $\triangle CBT \sim \triangle CQM$ и $\boxed{CB^2 = \frac{4}{3}CC_1 \cdot CQ}$. Из две заокружене једнакости налазимо $2r = CR = \frac{4}{3}CQ = \frac{4}{3}m$, тј. $r = \frac{2}{3}m$.

III. Исто као у претходном начину добијамо да је $\angle ACC_1 = \angle BCC_1$, а како су они периферијски углови над MQ и BQ, добијамо да су ове две тетиве једнаке, тј. $BQ = MQ$, сл. 3. Како је Q на симетрали дужи AB, добијамо и да је $AQ = BQ$, односно $AQ = BQ = MQ$. Како је $\triangle AQM$ једнакокрак, имамо да је подножје нормале из Q на AM, тачка Q_1, средиште основице AM. Сада из сличности правоуглих троуглова $\triangle COM \sim \triangle CQQ_1$ имамо $CQ_1 : CM = CQ : CO$, односно $\frac{3}{4}a : \frac{1}{2}a = m : r$, одакле је $r = \frac{2}{3}m$.



Сл. 3



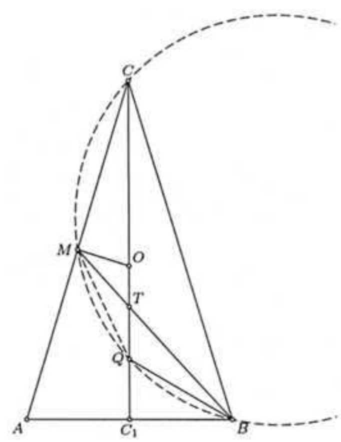
Сл. 4

IV. Исто као у претходном начину добијамо да је $AQ = MQ$. Означимо са D тачку симетричну тачки A у односу на Q, сл. 4. Како је $\triangle AQM \sim \triangle ADC$ (хомотетија из A са коефицијентом сличности 2), добијамо да је и $\triangle ADC$ једнакокрак, па му је дуж DM и висина и тежишна линија. Како је $OM \perp AC$, добијамо да $O \in DM$, односно $DM \cap l = \{O\}$ и, како је $AM = MC$ и $AQ = QD$, добијамо да је O тежиште троугла ADC, па је $CO = \frac{2}{3}CQ$, тј. $r = \frac{2}{3}m$.

V. Исто као у II начину добијамо да је $\angle ACC_1 = \angle BCC_1$, а одатле следи сличност правоуглих троуглова CMO и CC_1B, па је $CO : CB = CM : CC_1$, тј. $r : a = \frac{1}{2}a : h$ и $\boxed{r = \dfrac{a^2}{2h}}$.

Из сличности $\triangle CQB \sim \triangle CMT$ (опет $\angle ACC_1 = BCC_1$, а из тетивног четвороугла $CMQB$ је $\angle CQB = \angle CMT$) следи $CQ : CM = CB : CT$, тј. $m : \frac{1}{2}a = a : \frac{2}{3}h$, па је $\boxed{m = \dfrac{3a^2}{4h}}$.

Из две заокружене једнакости добијамо $r = \frac{2}{3}m$.



Сл. 5

VI (решење Македонаца – радили на припремама Птоломејеву теорему). Исто као у III начину добијамо да је $MQ = BQ = x$. Применимо Птоломејеву теорему на тетивни четвороугао $CMQB$: $CM \cdot BQ + BC \cdot MQ = MB \cdot CQ$, тј. $\frac{1}{2}a \cdot x + a \cdot x = MB \cdot m$, па је $\boxed{MB = \dfrac{3ax}{2m}}$.

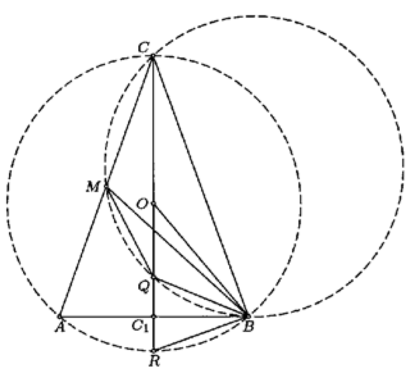
Из сличности $\triangle CTM \sim \triangle BTQ$ (унакрсни $\angle CTM = \angle BTQ$ и периферијски у тетивном четвороуглу $\angle MCT = \angle QBT$ и $\angle CMT = \angle BQT$) следи $MC : CT = QB : BT$, тј. $\frac{1}{2}a : \frac{2}{3}h = x : \frac{2}{3}MB$, одакле је $MB = \dfrac{2hx}{a} = \dfrac{3ax}{2m}$, тј. $\boxed{4hm = 3a^2}$.

Из сличности правоуглих троуглова $\triangle CMO \sim \triangle CC_1B$ следи $CO : CB = CM : CC_1$, тј. $r : a = \frac{1}{2}a : h$ и $\boxed{r = \dfrac{a^2}{2h}}$. Одавде добијамо да је $r = \frac{2}{3}m$.

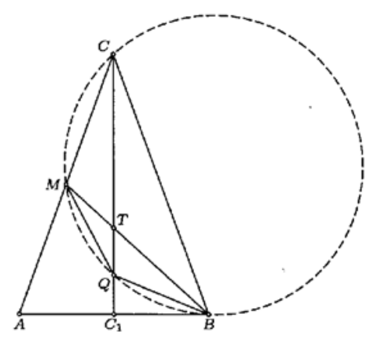
VII (решење Александра Кирилова Даскалова, ученика из Бугарске са максималних 40 поена). Нека је k кружница описана око $\triangle ABC$, са центром O, $l \cap k = \{R\}$, сл. 6. Означимо $\alpha = \angle BAC = \angle ABC$ и $a = AC = BC$. Како је тачка O центар описане кружнице, она припада симетрали дужи AB, тј. $O \in l$. Докажимо да су на правој l тачке поређане у редоследу C, O, Q, R.

У кружници k имамо следеће углове над луком BC: $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ и $\angle BRC = \angle BAC = \alpha$. Из тетивног четвороугла $BQMC$ добијамо да је $\angle BQC = \angle BMC$. Како је спољашњи угао $\angle BMC = \angle BAM + \angle ABM = \alpha + \angle ABM$, то је $\angle BMC > \alpha$ (јер је M тачка дужи AC). Како је $\angle ABM < \angle ABC = \alpha$, добијамо $\angle BMC < 2\alpha$, па је $\alpha < \angle BQC < 2\alpha$ и $\angle BRC < \angle BQC < \angle BOC$ и тачка Q је између O и R, а O је између C и Q. Тиме смо доказали да је на правој l редослед тачака C, O, Q, R.

Како је $\triangle BOR$ једнакокрак ($OR = OB = r$), из $\angle BOC = 2\alpha$ добијамо да је $\angle BOR = 180^\circ - 2\alpha = \angle ACB$. Из тетивног четвороугла $BQMC$ је $\angle BQO = \angle BMC$, што нам даје сличност $\triangle BQO \sim \triangle BMC$, одакле је $BC : CM = BO : OQ$, тј. $a : \frac{1}{2}a = r : OQ$ и $OQ = \frac{1}{2}r$. Сада, с обзиром на редослед тачака на правој l, добијамо да је $m = CQ = CO + OQ = \frac{3}{2}r$, односно $r = \frac{2}{3}m$.



Сл. 6



Сл. 7

VIII (решење два Казахстанца тригонометријом). Означимо $\alpha = \angle BAC = \angle ABC$ и $a = AC = BC$ и изразимо остале дужи у троуглу преко a и α, сл. 7. Имамо $AM = MC = \frac{1}{2}a$, $CC_1 = a\sin\alpha$, $AC_1 = a\cos\alpha$, одакле је $AB = 2a\cos\alpha$. Ако применимо косинусну теорему на $\triangle ABM$, добијамо $MB^2 = AM^2 + AB^2 - 2AM \cdot AB\cos\alpha$, тј. $MB^2 = \frac{1}{4}a^2 + 4a^2\cos^2\alpha - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot 2a\cos\alpha \cdot \cos\alpha =$

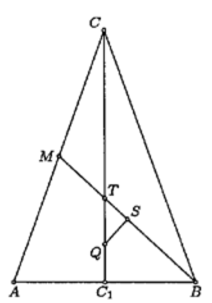
$\frac{1}{4}a^2(1+8\cos^2\alpha)$. Како су BM и CC_1 тежишне дужи троугла ABC, то је њихов пресек T тежиште и важи $TM=\frac{1}{3}MB$, $TB=\frac{2}{3}MB$ и $TC=\frac{2}{3}CC_1$. Ако сада искористимо потенцију тачке T у односу на кружницу описану око тачака B, C и M (или из сличности $\triangle BTQ\sim\triangle CTM$), имамо да је $TM\cdot TB=TC\cdot TQ$, односно $\frac{2}{9}MB^2=\frac{2}{3}CC_1(CQ-\frac{2}{3}CC_1)$, тј. $\frac{1}{12}a^2(1+\cos\alpha)=a\sin\alpha(m-\frac{2}{3}a\sin\alpha)$, што након сређивања даје $m=\dfrac{3a}{4\sin\alpha}$. Из синусне теореме у троуглу ABC имамо да је $\dfrac{a}{\sin\alpha}=2r$, односно $r=\dfrac{a}{2\sin\alpha}=\dfrac{2}{3}m$.

IX (решење Казахстанца Пак Алексеја аналитичком геометријом). Нека је S средиште дужи BM. Исто као у III начину добијамо да је $MQ=BQ$, тј. $\triangle BQM$ је једнакокрак, па је $SQ\perp BM$.

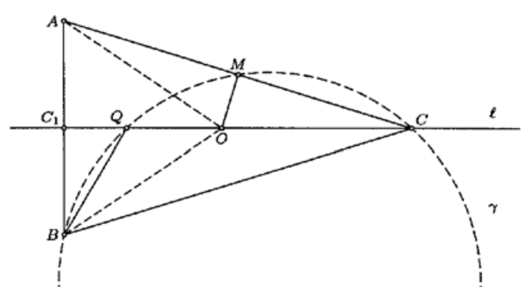
Уведимо координатни систем на следећи начин: $A(-4,0)$, $B(4,0)$, $C(0,4a)$, сл. 8. Тада је $M(-2,2a)$, $S(1,a)$ и $C_1(0,0)$. Једначина праве кроз две дате тачке (x_1,y_1) и (x_2,y_2) је $y=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot x+\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1-x_2}$. Једначина праве MB је $y=-\dfrac{a}{3}x+\dfrac{4a}{3}$. Права SQ је нормална на MB, па је њен коефицијент правца $k_{SQ}=-\dfrac{1}{k_{MB}}$ и кад уврстимо $S\in SQ$, добијамо за SQ: $y=\dfrac{3}{a}x+a-\dfrac{3}{a}$. Пресек ове праве и y-осе је тачка $Q\Big(0,a-\dfrac{3}{a}\Big)$. Растојање $CQ=4a-\Big(a-\dfrac{3}{a}\Big)=3\,\dfrac{a^2+1}{a}$. Површина троугла ABC је $P=\frac{1}{2}AB\cdot CC_1=\frac{1}{2}8\cdot 4a=16a$, а $AC\cdot BC\cdot AB=BC^2\cdot AB=(16+16a^2)\cdot 8$. Из формуле $P=\dfrac{abc}{4r}$ добијамо $r=2\,\dfrac{a^2+1}{a}=\dfrac{2}{3}m$.

Напомена. Можемо искористити и формулу за површину троугла, изражену преко координата (x_A,y_A), (x_B,y_B), (x_C,y_C) његових темена,

$$P=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 1\\ 0 & 4a & 1\end{vmatrix}\right|=16a.$$



Сл. 8



Сл. 9

X (комплексним бројевима). Означимо комплексне бројеве који одговарају тачкама одговарајућим малим словима. Узећемо да је $o=0$ и да су тачке A, B и

C на јединичној кружници са центром у координатном почетку, сл. 9 (на тај начин се велики број формула значајно поједностављује, а нисмо изгубили на општости јер на крају све можемо хомотетично пресликати, при чему се чувају сви односи): $a = a$, $b = \bar{a} = \dfrac{1}{a}$, $c = 1$. Тада M, средиште дужи AC, налазимо по формули $m = \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{a+1}{2}$. Комплексна координата пресека Q кружнице γ кроз B, C и M и праве l је чисто реална ($q \in \mathbf{R}$) и добијамо је из услова да четири тачке припадају кружници: $k = \dfrac{m-c}{b-c} : \dfrac{m-q}{b-q} \in \mathbf{R}$. Средимо овај израз:

$$k = \frac{m-c}{b-c} \cdot \frac{b-q}{m-q} = \frac{\frac{a+1}{2} - 1}{\frac{1}{a} - 1} \cdot \frac{\frac{1}{a} - q}{\frac{a+1}{2} - q} = \frac{aq-1}{1+a-2q}.$$

Да бисмо овај разломак ослободили од имагинарности у имениоцу, треба га проширити бројем конјугованим имениоцу:

$$k = \frac{aq-1}{1+a-2q} \cdot \frac{\overline{1+a-2q}}{\overline{1+a-2q}} = \frac{(aq-1)(1+\bar{a}-2q)}{|1+a-2q|^2} = \frac{aq-1-2q^2a+2q+a\bar{a}q-\bar{a}}{|1+a-2q|^2},$$

тј. добијамо

$$k = \frac{-1+3q-(a+\bar{a})}{|1+a-2q|^2} + a\,\frac{q+1-2q^2}{|1+a-2q|^2}$$

(овде смо користили да је $a\bar{a} = 1$ јер је A на јединичној кружници). У претходном изразу за k први сабирак је чисто реалан ($a + \bar{a} = 2\operatorname{Re} a$), а други је комплексан број a помножен реалним бројем. Стога, да би k био чисто реалан број, потребно је да важи $q+1-2q^2 = 0$, односно добијамо квадратну једначину чија су решења $q_1 = 1$ и $q_2 = -\frac{1}{2}$ (кружница γ и права l имају две пресечне тачке). Прво решење одговара тачки C ($Q \neq C$), те је $q = -\frac{1}{2}$. Стога је $m = |QC| = |c-q| = \frac{3}{2}$, те је $r = 1 = \frac{2}{3}m$.

На овај начин нико није радио задатак на такмичењу. Ову методу смо показивали ученицима Математичке гимназије у Београду.

Кроз ових 10 различитих решења дотакли смо се мноштва геометријских појмова, теорема и идеја. Тако се у овом осврту јављају Талесова и Птоломејева теорема, тетивни четвороугао, однос периферијског и централног угла, однос спољашњег и унутрашњег угла, збир углова у троуглу и четвороуглу, потенција тачке у односу на круг, „паковање“ задатка да је O тежиште троугла ADC (решење IV), хомотетија, особине висине једнакокраког троугла, косинусна и синусна теорема, као и сређивање тригонометријских израза, аналитичко решавање задатка, коефицијент правца праве, пресек две праве, површина троугла (и преко детерминанти – ту је могуће подсетити се сва три начина за израчунавање детерминанти: Сарусовог правила, Лапласовог развоја и свођења на троугаони облик), решавање геометријских задатака применом комплексних бројева. Такође, сва решења су детаљно исписана (не као у већини књига и збирки), да би ученици видели шта се од њих очекује да показују.