Александар Сеничић

ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРИЈЕ

Мој приступ теми

Мотивација

Познати холандски дидактичар математике Ханс Фројдентал, један од највећих ауторитета методике математике у 20. веку, у познатој монографији "Mathematics as an educational task" [8, 454] пита се:

„Али зашто инсистирати на геометријској аксиоматици? Нико не оспорава да је аксиоматика могућа у школској математици – аксиоматика групе, мере, линеарног поретка, цикличног реда, појма угла, али и у било ком другом случају аксиоматике као активности аксиоматизације. Од првог часа математике па на даље, ученик се може упознати са групама, мерама, уређеним низовима, операцијама са угловима. Без сумње је много теже открити заједнички елемент у бројним моделима таквих аксиоматских система и унутрашње односе ових модела него што је открити потпуну индукцију у примерима такве индукције. И, то је чак лакше него изоловати формалну дефиницију паралелограма у збуњујућој разноликости својстава паралелограма. Ученик који „открије“ и формулише заједничке елементе у таквим моделима и из ове разноликости изабере неколико особености из којих изведе остале, ушао је у изразито математичку активност са трајним и широко преносивим ефектима. Он сазнаје глобалну организацију, која не значи организовање система из унутрашњости, већ организовање категорије система посматрајући га из спољашњости - он у ствари учи да аксиоматизује. Успостављање онтолошке везе онда и није нов проблем. Аксиоматизирање апстракцијом доводи до тога да везе нестају и бледе (као што у аритметици кликери или столице или цвеће под утицајем аритметичких операција губе на значају). Након тога ученика треба навести да постане свестан тог процеса, али тада је и извесно да се процес десио, док код предавања аксиоматске геометрије нема ни најмање гаранције да је ученик успео да успостави онтолошку везу.

Штета је да се у бројним публикацијама о аксиоматици у школама формална аксиоматика чак и не спомиње. Мислим да је то због недостатка вере у математику и у структуру личности адолесцента. Математику као активност треба резервисати за одраслог математичара, човека који поседује алат и зна како да га користи. Аксиоматизирање је привилегија стручњака. Ученици морају изучавати аксиоматику, а стручњаци знају шта је добро за њих. Постоје многа подручја у којима се учи аксиоматика; геометрија је само део. Али, кад се ученик већ упозна са аксиоматиком, зар не би било могуће повести га према геометријској аксиоматици? Пре него одговоримо на ово питање, морамо се упитати шта се тиме постиже? Одбијам одговор да без аксиоматике нема строгости у геометрији. Зависи од контекста шта она значи, и онај ко би оправдавао геометријску аксиоматику потребом за строгошћу, био би обавезан да означи контекст који се не може адекватно покрити локалним организовањем.“

Мотивисан Фројденталовим текстом, одлучио сам да своје (надаме се, успешно) наставно искуство у реализацији ових садржаја, који су осетљиви и по мојој оцени значајни, преточим у чланак.

Основне напомене

Аксиоматика се у првом разреду средње школе обрађује после математичке логике и теорије скупова. Зато представља одличну вежбу за ученике да се практично упознају са применом таутологија, логичких и скуповних закона, исказним рачуном и математичким језиком. Материја коју треба изложити ученицима тешка је и захтева стрпљење предавача.

Због тежине материје постоје предлози да се ђацима уместо аксиома и теорема ова област презентује у облику стотинак аксиома или дефиниција. На тај начин прескаче се аксиоматска теорија и наставља се обрада тамо где смо ученике и оставили у основној школи. Предавач би имао више времена за конкретну геометрију (подударност, троугао, круг, четвороугао, конструктивне задатке и друге примере). Аксиоме би могле да се предају када се обради „интересантнији део геометрије“ и ученици постану зрелији за један такав захват.

Основни циљ учења математике јесте развој математичког мишљења. У циљу развоја интуиције код ученика геометрија представља важно подручје за развој ученичког мишљења. Велики филозоф Имануел Кант у „Критици чистог ума“ долази до закључка да се „геометријски докази заснивају на здравом разуму и графичким фигурама и да се захтев за ригорозношћу може одбацити и пригрлити интуиција“. Велики математичар Гаус заступао је супротно становиште: „Ригорозност је незамењива, а већина математичара је некомпетентна“. Гаусов став веома је битан за геометрију као научну дисциплину, само је питање шта урадити са становишта методике.

Основна питања која себи постављам су:

- да ли предавати ученицима аксиоматску теорију?
- ако је предајемо, када је предавати и како је предавати?

Комплетно изостављање аксиоматске геометрије био би лош преседан, јер бисмо се на тај начин вратили интуитивном приступу и изгубили шансу да на једном конкретном примеру научимо ученике да примењују законе математичке логике. Ове напомене важе за планове математике у гимназијама, док за стручне школе треба размислити да ли би требало уопште обрађивати аксиоматику.

Одговор на друго питање много је сложеније. У нашим средњим школама аксиоматска теорија предаје се у првом разреду и представља тешку материју за ученике. Фонд часова за ову тему је мали и мислим да се оваквим приступом направи већа штета него корист. То време би се могло искористити за обраду других тема у геометрији у којима ученици могу да брусе своје размишљање. Аксиоматска теорија би се предавала касније, када ученици постану зрелији и постану свеснији потребе за формализацијом интуитивног знања. Ако геометријска аксиоматика треба да буде значајан школски предмет, ученицима треба омогућити да је доживе као сопствену активност. Уколико је ученик научио извођење из аксиома код примера једноставнијих материјала, он ће у компликованијим аксиоматским системима поново открити добро познате особине. Он ће моћи да размрси и разуме систем аксиома као да га је сам сачинио. Ономе ко није никада вежбао извођење из аксиома, аксиоматски систем геометрије може само бити још једна „несварљива хрпа“ математике поврх свега другог. Фонд за обраду ове теме би морао бити већи и могао би се предавати у склопу обраде аксиоматског заснивања бројева (и ова је тема у програму првог разреда). То би захтевало промену планова и целе концепције предавања математике у нашим средњим школама.

Први сусрет ученика са озбиљном математиком управо је аксиоматско заснивање геометрије. Тема захтева озбиљно залагање и ученика и предавача. Ученици се сусрећу са строгим заснивањем геометрије (аксиомама, основним и изведеним појмовима, теоремама) које се суштински разликује од интуитивног прилаза презентираног у основној школи. Тај прелаз је вишеструко тежак за ученике. Проблема које имају ученици код усвајања аксиома елементарне геометрије има неколико:

1. висок ниво апстрактности;
2. ранија (интуитивна) предзнања као сметња;
3. неразвијена или одсутна техника доказивања.

Да бисмо помогли ученицима да преброде ове проблеме потребно је много стрпљења и вештине наставника. Кроз дијалог ученике треба наводити да што више сами закључују. Треба објаснити потребу за основним појмовима и аксиомама. Поимање геометријских појмова је интуитивно и ученици не осећају потребу да се ти појмови формално уведу. Потребно је објаснити шта су основни појмови, зашто се основни појмови не дефинишу и зашто су заиста потребне аксиоме.

Шта је тачка? Шта је права? Шта је раван?

Да бисмо се бавили геометријом (и не само геометријом), морамо увести основне појмове и полазна тврђења – аксиоме.

Основу чини непразан скуп S чије елементе зовемо *тачкама* и означавамо их великим латиничним словима (A, B, C, ...).

Одређене подскупове скупа S зваћемо *правим* и означаваћемо их малим латиничним словима (a, b, c, ...).

Одређене подскупове скупа S зваћемо *равнима* и означаваћемо их словима грчког алфабета (α, β, γ, ...).

Шта значи да тачка лежи у равни? Шта значи да права лежи у равни?

Само увођење основних појмова није довољно за схватање геометрије. Ми замишљамо тачке, праве и равни у извесним међусобним односима и означавамо ове односе речима „лежати“, „између“, „подударно“ и имамо представу о тим односима јер су нам у основној школи наставници дали представе о томе, *али не кроз строг аксиоматски приказ.*

Аксиомама постижемо тачан и за математичке сврхе потпун опис ових односа основних објеката.

Шта су аксиоме?

Аксиоме су прости основни ставови помоћу којих објашњавамо законитости које важе међу основним појмовима. То нису дефиниције, већ полазне истине од којих се полази у заснивању теорије.

Зашто уводимо дефиницију, а не аксиоме?

Зато што су ово изведени појмови којима се само именују ситуације које важе. Дефиниције спадају у неку врсту неизбежне терминологије која поједностављује излагање садржаја.

Шта су то неколинеарне тачке?

Дефиниција. За тачке се каже да су колинеарне ако постоји права која их садржи. Иначе су оне неколинеарне.

У овој дефиницији само именујемо тачке за које постоји права која их садржи. Дајемо им име – „тачке су колинеарне“. Уместо реченице „Тачке A, B, C су неколинеарне“, можемо да пишемо „Тачке A, B, C за које не постоји права која их садржи“. Свакако је лакше писати први облик, иако је разумљивији други начин. (*Напомена.* У преводу књиге Давида Хилберта „Основе Геометрије“ Ж. Гарашина не користи се појам колинеарне, већ „тачке леже на правој“. Због тога се може и размислити о употреби речи колинеарни, компланарни и сл.)

Други део реченице у дефиницији значи да ако не постоји права која садржи тачке, за њих кажемо да су неколинеарне.

Дефиниција. За тачке се каже да су компланарне ако постоји раван која их садржи. Иначе су оне некомпланарне.

Дефиниција. За праве се каже да се секу ако ако имају заједничку тачно једну тачку.

Дефиниција. За праву и раван кажемо да се секу ако имају заједничку тачно једну тачку.

Дефиниција. За разне равни кажемо да се секу ако имају заједничку тачку.

Аксиоме везе

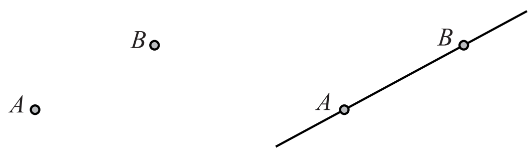
Аксиоме ове групе описују основне скуповне односе између тачака, правих и равни. За предавача је битно какав је скуп аксиома одабрао. Хилбертов скуп аксиома је најприкладнији. У уџбеницима које користе наши ученици постоје разноразни „скраћени“ системи аксиома са циљем олакшања материје. Свакако је лакше закључивати са шест правила него са девет, али се треба придржавати принципа научности па излагати материју онакву каква јесте.

Временски фактор је ограничавајући за предавача, нарочито ако се узме у обзир да је за обраду целе теме дато девет часова, а за специјализована математичка одељења 16 часова. Потребно је одвојити цео један час за објашњавање аксиома припадања без доказивања било каквих тврђења. Таксативно набрајање аксиома код ученика ствара одбојност. Свака аксиома мора се разјаснити до последњег детаља.

Да ли користити математички језик у запису? Запис је за ученике првог разреда довољно стран па је боље фокус пребацити на суштину самих аксиома и избећи конфузију коју код њих ствара математички језик. Због тога је најбоље симболички запис редуковати на минимум и дати предност усавршавању текстуалног доказа.

Што се тиче модела који наставник ђацима црта, њима треба објаснити да је то само модел који нам служи да лакше схватимо теорију. Приликом доказивања не можемо користи реченицу „види се са слике“. Сами појмови тачка, права, раван не могу се опипати, видети, већ се може само нацртати нешто што ћемо тако звати.

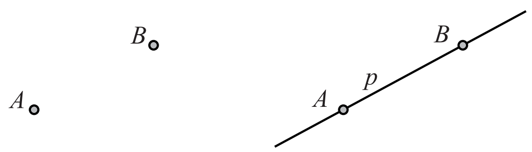
1. *За сваке две тачке постоји најмање једна права која их садржи.*



Сл. 1

Које су полазне чињенице? Шта је последица? Да ли је та права јединствена? Да ли су те тачке различите? Да ли се из аксиоме може закључити да права изгледа као на цртежу? Тачке не морају бити различите, већ се могу поклопити. Тада имамо ситуацију да може бити и више правих. Аксиома не говори о томе када има само једна, када их има више. То што ми то искуствено знамо не значи да можемо да користимо касније у доказима. Свако трвђење мора да се докаже.

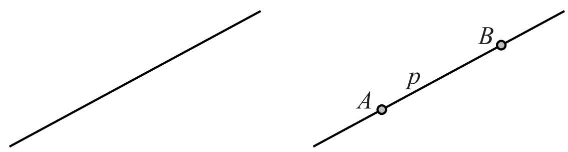
2. *За сваке две разне тачке постоји највише једна права која их садржи.*



Сл. 2

Које су полазне чињенице? Шта је последица? Каква је разлика у односу на 1? Сада у односу на претходну аксиому, ова аксиома прецизније објашњава ситуацију када су тачке различите. Зашто није речено да постоји тачно једна права која их садржи? У аксиомама се стављa минимум тврђења. Теорију треба градити на што је могуће мање произвољних претпоставки. Зато је стављен слабији услов, најмање једна права. Коришћењем прве две аксиоме доказаћемо тврђење да постоји тачно једна права која садржи две различите тачке. У аксиому нећемо ставити ништа што се може доказати.

3. *Свака права садржи бар две различите тачке.*

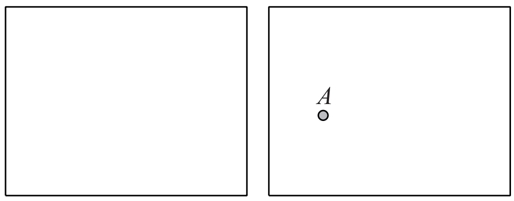


Сл. 3

Да ли можемо на правој узети три тачке или можда више? Каква је разлика између ове аксиоме и претходне?

Имамо праву. Да ли је исправан закључак: на правој постоје две тачке јер је права одређена са две различите тачке?

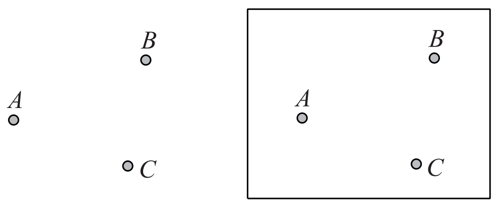
4. *Свака раван садржи бар једну тачку.*



Сл. 4

Само се тврди да скуп тачака који ћемо звати раван не може бити празан, већ мора имати бар један елемент.

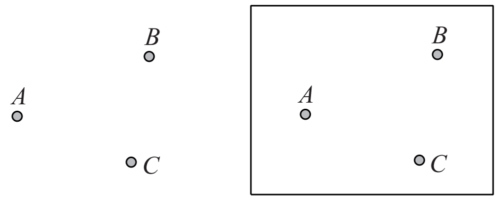
5. *Постоји бар једна раван која садржи три тачке.*



Сл. 5

Какве су ове тачке? Да ли су тачке неколинеарне? Да ли су тачке различите? Колико равни садржи дате тачке? Са којом аксиомом има сличности? Да ли можемо доказати да за сваку тачку постоји раван која је садржи? Као и код прве аксиоме овде није назначено да тачке морају бити различите. Није назначено колико равни садржи тачке, већ само постојање бар једне равни.

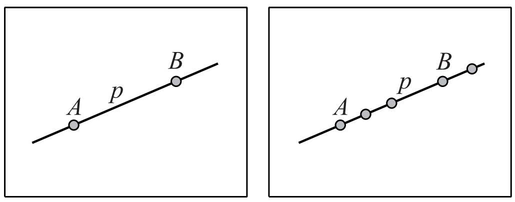
6. *Постоји највише једна раван која садржи дате три неколинеарне тачке.*



Сл. 6

Како би гласила аксиома 6. да немамо дефиницију неколинеарних тачака? Овде је дата чињеница која објашњава постојање равни када су тачке неколинеарне. Помоћу аксиома 5. и 6. доказаћемо да за три неколинеарне тачке постоји тачно једна раван која их садржи.

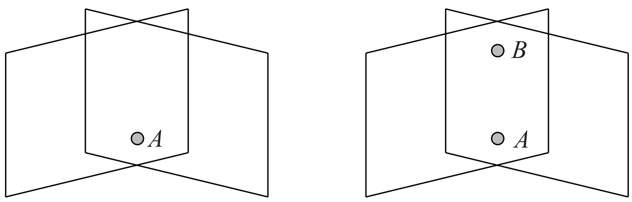
7. *Ако две разне тачке неке праве припадају некој равни, тада и све тачке те праве припадају тој равни.*



Сл. 7

Ова аксиома говори о односу две врсте подскупова правих и равни. Даје услове када ће права бити подскуп неке равни. На цртежу се приказује да на правој има више од две тачке; то је само да бисмо дочарали аксиому на моделу, а не да бисмо закључили из аксиоме да права има више тачака. Права обавезно има више од две тачке, али су нам за доказ те чињенице потребне аксиоме распореда.

8. *Ако две равни имају заједничку тачку, тада оне имају заједничку бар још једну тачку.*



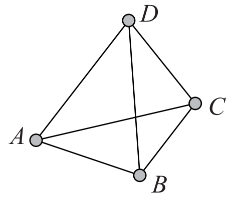
Сл. 8

Да ли су равни различите? Да ли је пресек равни права? Поштујући принцип минимума и ова аксиома показује минимум информација. Она ће нам омогућити да докажемо да ако су равни различите, пресек две равни ће бити права.

9. *Постоје четири некомпланарне тачке.*

Ово је једина аксиома која даје тврђење без икаквог предуслова. Тврди се да постоје 4 некомпланарне тачке. Да ли су ове тачке различите? Колико је правих одређено овим тачкама? Колико је равни одређено?

Ово би представљао пример часова на којима ја уводим ученике у свет аксиома. Примедба коју ми ученици често постављају је зашто цртам тачке као туфне; одговарам да то како цртамо тачке је само наша свест о томе. За домаћи задатак добију да донесу неколико тачака, правих и равни (иначе, идеја професора Станоја Петровића).



Сл. 9

Поставља се питање како наставити. Најчешћи пут је доказивање теорема: Права и тачка ван ње одређују тачно једну раван. Две праве које се секу одређују тачно једну раван. Итд.

Мислим да је бољи пут да се крене од аксиоме 9, јер је то једина аксиома која тврди о постојању неког основног објекта. Ученицима треба показати да из аксиома веза следи да постоје 4 тачке, 6 правих и 4 равни. На тај начин бисмо им показали да је потребно увести нове аксиоме (аксиоме распореда) и обезбедити да равни и праве имају бесконачно много тачака. Овај пут је тежи, али добитак ће бити већи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Графити и Математички факултет, Београд 1994.

[2] Д. Хилберт, *Основе геометрије*, Математички институт, Београд 1957.

[3] П. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург, Б. Боричић, *Математика за I разред средње школе*, Завод за издавање уџбеника, Београд, 1991.

[4] С. Ж. Петровић, *Методички приручник за наставу математике у средњој школи*, Ученичка задруга Машинско-техничке школе Краљево, 2002.

[5] Л. Млодинов, *Еуклидов прозор*, Лагуна, Београд, 2005.

[6] М. Коен, Е. Нејгел, *Увод у логику и научни метод*, Јасен, Београд, 2004.

[7] Ј. Пинтер, Н. Петровић, В. Сотировић, Д. Липовац, *Општа методика наставе математике*, Учитељски факултет, Сомбор, 1996.

[8] H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publ. Co., North Holland, 1973.

[9] М. Марјановић, *Методика математике I, II*, Учитељски факултет, Београд, 1996.

[10] C. Reid, *A Long way from Euklid*, Dover Publication, Inc., New York, 2004.