Драгољуб С. Јовић

О СИМЕДИЈАНИ ТРОУГЛА

Циљ овог рада је да дефинишемо појам симедијане троугла и да докажемо нека њена основна својства. Али, пре тога, због потребе у даљем излагању, навешћемо следеће две теореме.

Теорема 1. *Растојања ма које тачке тежишне дужи троугла од страница, између којих се та тежишна дуж налази, обрнуто су пропорционална са овим страницама.*

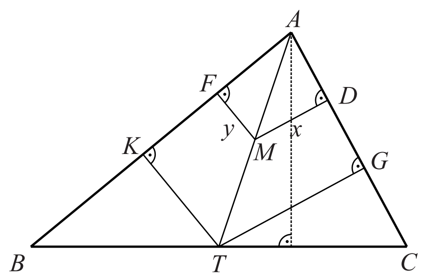
Доказ. Нека је M произвољна тачка тежишне дужи AT троугла ABC, чије су странице $BC=a$, $CA=b$ и $AB=c$, а $MD=x$ и $MF=y$ растојања ове тачке од страница CA и AB, сл. 1. Како је $BT=TC=a/2$, следи да троуглови ABT и ATC имају једнаке површине, па је стога $\frac{1}{2}c\cdot TK=\frac{1}{2}b\cdot TG$, тј.

(1) $$TG:TK=c:b,$$

при чему је $TK\perp AB$ и $TG\perp AC$. Тада је $TK\parallel MF$ и $TG\parallel MD$, па на основу Талесове теореме следи да је $TG:x=AT:AM=TK:y$, одакле

(2) $$TG:TK=x:y.$$

Из једнакости (1) и (2) следи да је $x:y=c:b$, што је и требало доказати.



Сл. 1

Теорема 2. *Нека је ABC троугао, а M, N и P тачке, такве да су различите од темена A, B и C тог троугла и припадају правим BC, CA и AB, респективно. Праве AM, BN и CP секу се у једној тачки ако и само ако је*

(3) $$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AP}{PB}=1.$$

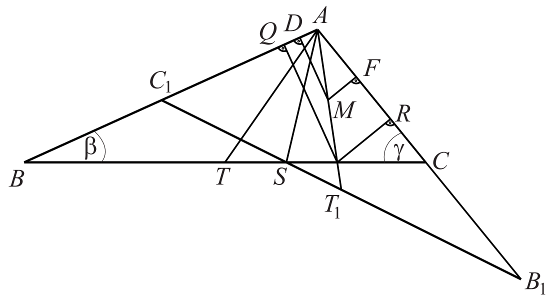
Ову теорему је 1678. године доказао италијански математичар, инжењер и економиста Ђ. Чева (Giovanni Ceva, 1648–1734), па се по њему и зове Чевина теорема. Њен доказ изостављамо, јер се може наћи у готово свакој књизи из геометрије.

Појам симедијане троугла увео је у геометрију француски математичар М. Докањ (Maurice d'Ocagne, 1862–1938).

Дефиниција. Симедијаном троугла називамо праву која је симетрична са тежишном дужи у односу на симетралу унутрашњег угла, конструисану из истог темена троугла.

Следећим теоремама доказаћемо неке од многих особина симедијане троугла.

Теорема 3. *Растојања ма које тачке симедијане троугла од страница, између којих се она налази, пропорционална су са овим страницама.*



Сл. 2

Доказ. Нека је AT тежишна дуж и AS симетрала угла CAB троугла ABC, чије су странице $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$ такве да је, на пример, $CA < AB$, сл. 2. Тада на страници AB постоји тачка C_1, таква да је $AC_1 = AC = b$. Обележимо ли са B_1 тачку пресека правих AC и C_1S, онда није тешко приметити да је троугао AB_1C_1 симетричан са троуглом ABC у односу на праву AS, па је стога и тежишна дуж AT_1 троугла AB_1C_1 симетрична са тежишном дужи AT троугла ABC у односу на ту праву. То значи да је AT_1 симедијана троугла ABC. Ако је M ма која тачка те симедијане, онда, према теореми 1, следи да су растојања MD и MF тачке M од страница $AC_1 = b$ и $AB_1 = c$ троугла AB_1C_1 обрнуто пропорционална са овим страницама, тј. следи да је $MD : MF = AB_1 : AC_1 = c : b$, што је требало доказати.

Теорема 4. *Симедијана троугла дели наспрамну страницу тог троугла на одсечке, пропорционалне са квадратима страница између којих се она налази.*

Доказ. Ако са P означимо тачку пресека тежишне дужи AT_1 троугла AB_1C_1 са страницом BC троугла ABC, сл. 2, онда према теореми 3 следи да су растојања PQ и PR тачке P од страница AB и AC пропорционална са овим страницама, тј.

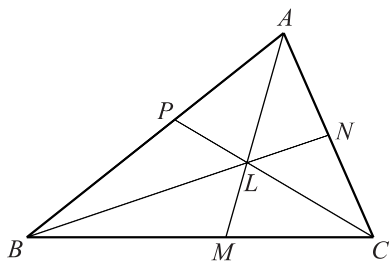
$$\frac{PQ}{PR} = \frac{c}{b}. \tag{4}$$

Међутим, како је $PQ = PB\sin\beta$ и $PR = PC\sin\gamma$, а $\sin\beta : \sin\gamma = b : c$, једнакост (4) постаје $\dfrac{c}{b} = \dfrac{PB\sin\beta}{PC\sin\gamma} = \dfrac{PB}{PC}\cdot\dfrac{b}{c}$, одакле је $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{c^2}{b^2}$, што је и требало доказати.

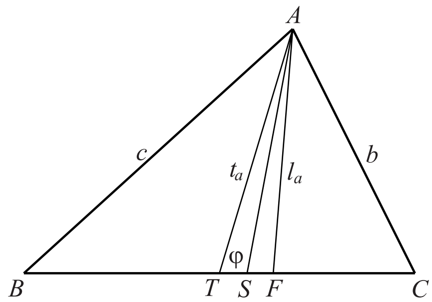
Теорема 5. *Симедијане троугла секу се у истој тачки.*

Ову теорему је 1873. године доказао француски математичар Е. Лемоан (Emile Michel Hyacinthe Lemoine, 1840–1912), па се по њему зове *Лемоанова теорема*, а тачка у којој се секу све три симедијане троугла зове се *Лемоанова тачка* троугла, и обично обележава са L.

Доказ. Нека су AM, BN и CP симедијане троугла ABC, чије су странице $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, сл. 3. Треба доказати да се ове симедијане секу у једној тачки. Заиста, ако применимо теорему 4, имамо да је $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{c^2}{b^2}$, $\dfrac{CN}{NA} = \dfrac{a^2}{c^2}$ и $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{b^2}{a^2}$. Помножимо ли ове три једнакости, добијамо да је $\dfrac{BM}{MC}\cdot\dfrac{CN}{NA}\cdot\dfrac{AP}{PB} = 1$, одакле, на основу Чевине теореме следи тврђење теореме.



Сл. 3



Сл. 4

Теорема 6. *Ако су a, b и c дужине страница BC, CA и AB троугла ABC, а l_a дужина његове симедијане AF, сл. 4, онда је*

$$l_a = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \tag{5}$$

Доказ. Нека је AT тежишна дуж, AS симетрала угла CAB и AF симедијана датог троугла и нека је, на пример, $c > b$. Одредимо дужине дужи FC, TS, SF и AT.

Према теореми 4 је $BF : FC = c^2 : b^2$, одакле је $(a - FC) : FC = c^2 : b^2$, па лако израчунавамо

$$FC = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}. \tag{6}$$

Како је AS симетрала угла CAB троугла ABC, то је $BS : SC = c : b$, а одатле, на основу познатих особина пропорција, следи да је $(BS + SC) : (c + b) = BS : c$, тј. $a : (c+b) = (a/2 + TS) : c$. Из последње једнакости се може израчунати дужина TS као

$$TS = \frac{a(c-b)}{2(c+b)}. \tag{7}$$

Како је $TS + SF = \frac{a}{2} - FC$, биће $SF = \frac{a}{2} - FC - TS$. Заменом вредности за FC и TS из релација (6) и (7) и сређивањем добијеног израза следи да је

$$SF = \frac{abc(c-b)}{(c+b)(c^2+b^2)}. \tag{8}$$

Најзад, познато је да се тежишна дуж $AT = t_a$ троугла може изразити помоћу његових страница као

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}. \tag{9}$$

Израчунајмо сада тражену дужину симедијане $AS = l_a$. Будући да је AS симетрала угла TAF, то је $TS : SF = AT : AF$, одакле је $AF = \frac{SF \cdot AT}{TS}$. Ако, користећи релације (8), (9) и (7), заменимо изразе за дужине SF, AT и TS и извршимо сређивање добијеног израза, добијамо тражени резултат

$$l_a = AF = \frac{bc}{b^2 + c^2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Аналогно је $l_b = \frac{ac}{a^2+c^2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$ и $l_c = \frac{ab}{a^2+b^2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Теорема 7. *У сваком троуглу дужина симедијане није већа од дужине одговарајуће тежишне дужи.*

Доказ. Користићемо ознаке и претпоставку $c > b$ као у претходној теореми, сл. 4. Треба доказати да је $l_a \leqslant t_a$. На основу доказаних релација (5) и (9), та неједнакост је еквивалентна неједнакости $\frac{bc}{b^2+c^2} \leqslant \frac{1}{2}$, што је очигледно увек испуњено.

Једнакост ће у доказаној неједнакости важити ако и само ако је $b = c$, тј. ако и само ако је троугао ABC једнакокрак. У том случају се симедијана и тежишна дуж које одговарају основици поклапају.