**Јелена Татар, Маја Јевђевић Милутиновић**

# УСВАЈАЊЕ ДЕФИНИЦИЈЕ ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ НИЗА

## 1. Увод

Увод у математичку анализу, као једну од најзаступљенијих грана математике, у средњошколској настави почињемо увођењем појма низа, његових особина, граничне вредности низа и њених особина. Ту се ученици први пут срећу са новим начином увођења и обраде нових појмова. У знатној мери се захтева и нека теоријска основа, што ученици обично тешко прихватају.

Психолошки гледано, ученицима средњошколског узраста одговара мишљење на нивоу формално-логичких операција, што представља четврти и последњи ниво развоја мишљења према Пијажеу. Нека досадашња проверавања Пијажеове теорије показују да се овладавање свим формално-логичким операцијама не дешава истовремено, већ да њихово усвајање зависи од садржаја над којим се те операције примењују [7]. Област математичке анализе је подручје у коме се недовршеност развоја мисаоних структура ученика средње школе може веома добро илустровати, у оним случајевима када се тражи формална дефиниција неког математичког појма коју треба исказати преко вербалне дефиниције. Ученици веома тешко усвајају овакве дефиниције, па се поставља питање сврсисходности теоријске обраде ових појмова. Овде се чини смисленим поставити питање да ли правац развитка научних појмова има супротан смер од развоја спонтаних појмова, с обзиром да постојање формалне вербалне дефиниције захтева дедуктивни приступ формирању појма, од општег ка конкретном, а спонтани појмови се формирају на конкретним појавама, што постепено води уопштавању. Виготски [2] сматра да се научни појмови ипак ослањају на првобитне спонтане и да учење може стимулисати развој начуног појма и припомоћи његовој формализацији. Ово становиште је супртоно Пијажеу који развој посматра као процес индивидуалне конструкције који није подложан обучавању, већ механизам промене представља сазревање структура, које постају квалитативно сложеније од оних већ постојећих. Нека експериментална истраживања деце нижег школског узраста [1] показују да педагошке импликације ове две супротстављене теорије више не треба посматрати кроз опредељивање за једну или другу, већ треба „ ... поставити питање на који начин и под којим условима се нове способности формирају кроз процес индивидуалне конструкције, а на који начин и под којим условима се нове способности формирају кроз сарадњу са другима“. [1]

Ако се вратимо нашој теми о сврсисходности подучавања појмовима из математичке анализе, када је очигледно да формализација тих појмова кроз вербалну дефиницију представља тешкоћу на датом узрасту, можемо рећи да сам процес учења овог садржаја представља шансу да се убрза и потпомогне процес развоја нове структуре, појмовног математичког мишљења. Сличне идеје можемо наћи код још неких аутора (Егерић [3]): „ ... ако се приликом развоја појмовног размишљања, обично у доба адолесценције, ученику не да прилика и ако га не усмеравамо да се укључи у формалније закључивање, он можда никада неће бити способан да развије стилове и ниво размишљања који је неопходан за разумевање и прављење математичких доказа".

Дакле, не сматрамо да је теоријска основа неизбежна у обради ове наставне јединице у овом узрасту, али сматрамо да је ученике који ће даље студирати, потребно навикавати и на овакав начин обраде математичких садржаја.

Да бисмо проверили колико су ученици прихватили овај начин обраде појма граничне вредности низа, као и њене особине, урадили смо тест. На тесту су практично само теоријска питања, што за ученике у средњој школи није баш уобичајено.

Циљ тестирања је био, пре свега, да нам покаже спремност ученика и њихову зрелост да пређу на другачији начин обраде математичких садржаја. Из тог разлога тестирани су ученици математичког и природно-математичког смера, јер се претпоставља да ће и у њиховом даљем образовању бити присутна настава математике.

У првом делу излажемо питања на тесту, а затим одговоре које очекујемо на основу онога како је са ученицима ова наставна тема обрађена. Потом следи анализа одговора које су дали ученици. У овом делу издвајамо питања на која су ученици најбоље одговорили, али и она која су код ученика изазвала одређене нејасноће и недоумице.

## 2. Питања на тесту

1. Тачка нагомилавања низа.
2. Гранична вредност низа (запиши речима и симболима).
3. Заокружи тачна тврђења:
   (а) Тачка нагомилавања низа је увек и његова гранична вредност.
   (б) Гранична вредност низа је увек његова тачка нагомилавања.
   (в) Нека тачка нагомилавања низа је његова гранична вредност.
4. Објасни појам:
   (а) конвергентан низ;
   (б) дивергентан низ.
5. Особине граничне вредности функције (наведи особине које знаш).
6. Заокружи конвергентне низове:
   (а) $a_n = \dfrac{1}{n}$; (б) $b_n = (-2)^n$; (в) $c_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$;
   (г) $d_n = n^2 - 2n$; (д) $e_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$; (ђ) $f_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
7. Монотон низ.
8. Ограничен низ.

9. Теорема о монотоном и ограниченом низу.

### 3. Одговори

1. Број $a$ је тачка нагомилавања низа $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ако се у свакој околини броја $a$ налази бесконачно много чланова низа.
2. Број $a$ је гранична вредност низа $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ако се у свакој околини броја $a$ налазе скоро сви чланови низа (сви осим њих коначно много). Симболима записујемо:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N})(n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon).$$

   Другим речима, за сваку околину броја $a$, постоји природан број $n_0$, такав да се сви чланови низа са индексом већим од $n_0$ налазе у тој околини.
3. Тачни одговори су под (б) и (в). Ту не очекујемо неко објашњење од стране ученика.
4. (а) Конвергентан низ је низ који има граничну вредност.
   (б) Дивергентан низ нема граничну вредност. Овде се може навести разлика између одређено и неодређено дивергентних низова.
5. Овде би ученици требало да наведу особине граничне вредности низа којих се сећају. Ту се, пре свега, очекује да наведу сагласност граничне вредности са алгебарским операцијама, а затим и теореме о јединствености границе, евентуално и теореме о сагласности са релацијом поретка и теореме о укљештењу.
6. Тачни одговори су (а), (в), (д) и (ђ). Ни овде се не очекује посебно објашњење од стране ученика. У питању су примери који су у току обраде наставне јединице неколико пута поменути, при увођењу и илустровању појмова и особина низа, тако да се очекује да их ученици препознају (осим можда примера под (д)).
7. За низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ кажемо да је:
   - *растући* ако за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n \leqslant a_{n+1}$;
   - *строго растући* ако за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n < a_{n+1}$;
   - *опадајући* ако за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n \geqslant a_{n+1}$;
   - *строго опадајући* ако за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $a_n > a_{n+1}$.

   Сви ови низови се једним именом називају *монотоним низовима.*
8. • Низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ је *ограничен одозго* (или са горње стране) ако постоји реалан број $M$ са особином $(\forall n \in \mathbf{N})a_n \leqslant M$.
   - Низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ је *ограничен одоздо* (или са доње стране) ако постоји реалан број $M$ са особином $(\forall n \in \mathbf{N})a_n \geqslant M$.
   - Низ $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ је *ограничен* ако постоји реалан број $K$ такав да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи $|a_n| \leqslant K$. Овде је довољно навести да је низ ограничен када је ограничен и са горње и са доње стране.
9. Сваки монотон и ограничен низ је конвергентан. Како је сваки растући (опадајући) низ већ ограничен са доње (горње) стране својим првим чланом, може се формулисати и на следећи начин: „Сваки растући (опадајући) низ ограничен са горње (доње) стране је конвергентан.“

## 4. Резултати теста

Резултате теста приказаћемо прво табеларно, а потом анализирати добијене резултате задатак по задатак. Табела 1 представља одговоре које су дали ученици математичког смера, а табела 2 одговоре које су дали ученици природно-математичког смера.

Табела 1

| | тачни одговори | делимично тачни | нетачни одговори | без одговора |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 12 (39%) | 7 (23%) | 10 (32%) | 2 (6%) |
| 2. | 8 (26%) | 5 (16%) | 14 (45%) | 4 (13%) |
| 3. | 8 (26%) | 22 (71%) | 0 | 1 (3%) |
| 4. | 21 (68%) | 8 (26%) | 1 (3%) | 1 (3%) |
| 5. | 11 (35%) | 4 (13%) | 0 | 16 (52%) |
| 6. | 19 (61%) | $4+7$ (35%) | 0 | 1 (3%) |
| 7. | 22 (71%) | 6 (19%) | 2 (7%) | 1 (3%) |
| 8. | 12 (38%) | 5 (16%) | 11 (35%) | 2 (6%) |
| 9. | 22 (71%) | 0 | 1 (3%) | 8 (26%) |

Табела 2

| | тачни одговори | делимично тачни | нетачни одговори | без одговора |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 35 (65%) | 4 (7%) | 10 (19%) | 5 (9%) |
| 2. | 33 (61%) | 9 (17%) | 6 (11%) | 6 (11%) |
| 3. | 10 (19%) | 39 (72%) | 2 (4%) | 3 (5%) |
| 4. | 30 (55%) | 16 (30%) | 6 (11%) | 2 (4%) |
| 5. | 23 (43%) | 6 (11%) | 2 (4%) | 23 (43%) |
| 6. | 10 (19%) | 34 (63%) | 6 (11%) | 4 (7%) |
| 7. | 26 (48%) | 10 (19%) | 9 (17%) | 9 (17%) |
| 8. | 13 (24%) | 11 (20%) | 17 (32%) | 13 (24%) |
| 9. | 24 (44%) | 0 | 9 (17%) | 21 (39%) |

## 5. Анализа резултата теста – проблеми, најчешће грешке

**1.** У одговорима најчешће недостаје прецизност. Најучесталије грешке везане су за појам околине. Уместо појма околина или интервал (у овом узрасту под околином тачке сматрамо $\varepsilon$-околину, тј. симетричан интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$) користи се „око тачке $a$“ или „скуп који садржи $a$“. Појављују се и одговори који почињу са: „У некој околини … “, „У свакој околини … “, „У произвољној околини … “, „Постоји околина … “, што упућује на недовољно савладане квантификаторе. Такође, у делимично тачним јављају се одговори као: „Око тачке гомилају се или сакупљају чланови низа“, чак и одговори који почињу са: „На бројној правој се ту сакупљају … “. Ови одгвори упућују да су ученици интуитивно осетили шта појам тачке нагомилавања представља и у главама имају визуелну слику, али им математички речник којим располажу онемогућује да правилно формулишу дефиницију. Као чест одговор јавља се „у околини $a$ их је бесконачно много, а изван ње коначно“, што указује на непознавање разлике између тачке нагомилавања и граничне вредности низа. Код ученика математичког смера додатну забуну је увео појам тачке нагомилавања скупа, тако да се у одговорима јавља „приближавају јој се, али је не достигну“ или „ ... увек различити од $a$“. Ученици природно-математичког смера са овим појмом, као и граничном вредности функције срећу се тек наредне школске године, па ових забуна нема.

**2.** Много мање тачних и делимично тачних, а много више нетачних одговора. Анализирајући одговоре, прво код ученика математичког смера, долазимо до закључка да је велики број ученика навео дефиницију граничне вредности функције (коју они уче непосредно после обраде граничне врендости низа). Имајући у виду да и низ јесте функција, ово не би требало да смета, али десило се да опет део који се односи на околину независне променљиве (у овом случају природног броја $n$) нису добро интерпретирали и свели на дефиницију граничне вредности низа. Такође, грешка која се често понавља, не само у одговору на ово питање, већ и код одговора на 4. и 8. питање је мешање појмова гранична вредност низа и ограниченост низа, које слично „звуче“, али у математици имају сасвим различита значења. Дефиницију су ученици математичког смера, који су одговорили симболима, записали тачно. За разлику од њих, већина ученика природно-математичког смера је навела само „ ... у свакој околини су скоро сви чланови низа ... “. Значи, дефиниције тачке нагомилавања низа и граничне вредности низа памтили су тражећи заједничко „У свакој околини рбоја $a$ ... “, а разлика је у „ ... бесконачно много ... “ и „ ... скоро сви ... “ чланови низа. Много мањи број ученика је и пробао да запише дефиницију симболима. Поред забуне са квантификаторима (око редоследа), ученици су грешили око знака у неједнакости $|a_n - a| < \varepsilon$ (стављали су „$>$“ или чак „$=$“), што нас наводи на закључак да уопште не размишљају о значењу дефиниције, него је уче „напамет“, тј. њен запис симболима памте као слику. Око 10% ученика су навели дефиницију и речима и симболима како треба. Занимљиво је да је неколико ученика навело као одговор на ово питање „гранична вредност низа је тачка нагомилавања низа“.

**3.** Углавном нема нетачних одговора (око 2% свих тестираних ученика). Код делимично тачних у питању су задаци у којима су ученици заокружили само један од тачних одговора, и то углавном под (б). Можемо закључити да су ученици „осетили“ постојање разлике између тачке нагомилавања и граничне вредности низа, али опет постоји забуна до које доводи употреба кванитфикатора „неки“ и „за сваки“.

**4.** Питање на које је већина ученика математичког и више од половине ученика природно-математичког смера тачно одговорила. Закључујемо да су нову терминологију (*конвергентан* и *дивергентан*) ученици усвојили, иако са појмовима баш и нису расчистили. Код делимично тачних одговора, тачан је, наравно, одговор под (б) („онај низ који није конвергентан“). Понавља се грешка коју смо већ истакли, а то је поново замена појмова гранична вредност и ограниченост низа. Приметили смо и да велики број ученика појам конвергентности везује за појам монотоности низа (јавља се као чест одговор „монотон и ограничен низ“).

Интересантно је да код одговора на друго питање један број ученика је навео „низови који немају граничну вредност“ или „низови који имају више тачака нагомилавања“; тачно је и једно и друго, али одговор би требало да садржи и једно и друго.

**5.** Једине особине које су ученици навели се сагласност граничне вредности са алгебарским операцијама, што је и очекивано. У задацима који се раде у овом узрасту то су особине које се најчешће користе, док остале особине углавном само илуструјемо на неким примерима и у задацима које после радимо те особине се углавном не помињу. Занимљиво је да је неколико ученика као особину навело $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$, а да су изоставили, рецимо, сагласност са множењем. Само један ученик је поменуо јединственост границе. Свега један ученик је навео све теореме које су учили, а њих 5% скоро све.

**6.** У овом задатку наведени су низови који се са ученицима обраде на часу, било за илустровање особина или примене теореме о монотоном и ограниченом низу, или као посебна методска јединица (последњи низ којим уводимо број $e$). Велики број тачних одговора указује на то да су ученици запамтили примере рађене на часу и препознају и разликују конвергентне од дивергентних низова. Код делимично тачних одговора недостаје само један тачан одговор. У већини случајева то је последњи низ $f_n = (1+\frac{1}{n})^n$, што је доста очекивано, имајући у виду колико ученици ову методску јединицу (број $e$) тешко прихватају. Занимљиво је да је у осталим делимично тачним одговорима грешка била што је као конвергентан низ заокружен низ $d_n = n^2 - 2n$. Ни ово није тако неочекивано. Изучавајући особине конвергентних низова, закључило се да велики број ових особина важи и за одређено дивергентне низове (низове чија је гранична вредност $+\infty$ или $-\infty$), па не треба да чуди што их ученици сматрају конвергентним. Овде примећујемо знатну разлику у броју потпуно тачних одговора између ученика математичког и природно-математичког смера, што се могло и очекивати, јер смо исте садржаје радили на већем броју часова, урадили више примера и самим тим су их ови ученици лакше препознали.

**7.** Можемо да закључимо да су ученици углавном прихватили појам монотоних низова (и функција код ученика математичког смера). Из већине одговора закључујемо да под монотоним низовима ученици сматрају растуће и опадајуће низове (углавном је и запис симболима коректан). Занимљив је одговор неколицине ученика „монотони низови су они којима се чланови понављају, нпр. $-1$, 1, $-1$, 1, … “

**8.** Много мањи број тачних одговора, посебно код ученика природног смера, из разлога који смо већ наводили код анализе одговора на 2. и 4. питање. Поново постоји конфузија између граничне вредности и ограничености низа. Неки ученици појам горњег и доњег ограничења замењују појмом максималног и минималног елемента (ученици природно-математичког смера). Ученици појам горњег ограничења везују за позитивне, а доњег за негативне бројеве. Појам „ограничен“ се везује за појам „конвергентан“. Код великог броја ученика који имају делимично тачан одговор наведена је дефиниција низа ограниченог са горње (или доње) стране, али недостаје сама дефиниција ограниченог низа.

**9.** Ученици математичког смера који знају теорему, навели су је тачно. У осталим случајевима нема одговора. Код ученика природно-математичког смера поново мање тачних одговора, а појављују се и нетачни. У нетачним одговорима најчешће је наведено „конвергентан низ је ограничен“, што је као тврђење тачно, али то није тражена теорема.

## 6. Закључак

Ово тестирање је потврдило нашу претпоставку да усвајање формалне дефиниције математичког појма представља проблем ученицима овог узраста. Грешке које се јављају приликом покушаја дефинисања могу нам указати на она места на која треба обратити пажњу приликом рада са ученицима у овој области. Уочено је да ученици математичких одељења праве далеко већи број грешака које се тичу мешања два сродна математичка појма и њиховог недовољног разграничавања, што је последица временски блиске обраде сродних појмова. Требало би водити рачуна о томе да се на овом смеру, при обради ове области, више инсистира на појмовном разграничењу ових сродних појмова.

Такође је присутна грешка која произилази из чињенице да дефиницију записану путем математичких симбола ученици памте визуелно, као слику, а да при томе занемарују суштинска обележја. Методички гледано, ово треба узети у обзир приликом обраде симболички записаних дефиниција, наглашавајући спорна места и упозоравајући ученике унапред на места могућих грешки. Поред тога, визуелно усвајање градива је очигледно доминантан облик памћења оваквих садржаја, па то треба искористити и визуелну методу користити у обради оваквих појмова.

Иако формално дефинисање појмова наилази на сазнајне проблеме, који су развојна карактеристика датог узраста ученика, показало се да подучавање у овој области може дати резултате и довести до успеха у ситуацијама када се од ученика тражи да на конкретним примерима примени суштинске карактеристике формалне дефиниције (нпр. задаци 5, 6, 7).

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Бауцал, А., *Коснтрукција и коконструкција у зони наредног развоја: да ли Виготски и Пијаже могу бити у пару?*, Психологија **36**, 4 (2003).

[2] Виготски, Л., *Мишљење и говор*, Нолит, Београд 1983.

[3] Егерић, М., *Разумевање у настави математике*, Настава и васпитање **4** (2003), 341–356.

[4] Каделбург, З., Мићић, В., Огњановић, С., *Анализа са алгебром 3*, Круг, Београд 1998.

[5] Кечкић, Ј. Д., *Математика са збирком задатака за* III *разред*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 1994.

[6] Пијаже, Ж., Инхелдер, Б., *Интелектуални развој детета*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 1978.

[7] Степановић, И., *Истраживање формално-оперативног мишљења на узрасту 14–19 година*, Психологија **37**, 2 (2004).