Др Владимир Јанковић

ИЗВОД СЛОЖЕНЕ ФУНКЦИЈЕ

Код векторских функција векторске променљиве дефинишу се разне врсте диференцијабилности. Најважније су слаба и јака диференцијабилност, а за математичаре који се баве екстремалним проблемима од велике важности је и строга диференцијабилност. У овом тексту ћемо дати дефиниције разних врста извода и диференцијабилности и разматраћемо питање извода и диференцијабилности сложене функције.

Појмови слабог, јаког и строгог извода

Нека су X и Y нормирани простори, $D \subseteq X$, $f\colon D \to Y$ и $a \in \operatorname{int} D$. Уколико за $h \in X$ постоји

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

он се назива извод функције f у тачки a у смеру вектора h и обележава се са $f'(a;h)$. Ако функција f има у тачки a извод у произвољном смеру и ако постоји ограничени линеарни оператор $A \in L(X;Y)$, такав да је $f'(a;h) = Ah$ за свако $h \in X$, кажемо да је A слаб или Гатоов (Gâteaux) извод функције f у тачки a, а за функцију f кажемо да је диференцијабилна у слабом или Гатоовом смислу у тачки a. Функција може имати највише један слаб извод у тачки a. Обележавамо га (уколико постоји) са $f'(a)$. Такође се могу користити и остале класичне ознаке за извод.

Нека је $A \in L(X;Y)$. Ако је

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0,$$

кажемо да је A јак или Фрешеов (Fréchet) извод функције f у тачки a, а за функцију f кажемо да је диференцијабилна у јаком или Фрешеовом смислу у тачки a.

Задаци

1. Доказати да је ограничени линеарни оператор $A \in L(X;Y)$ јак извод функције f у тачки a ако и само ако постоји функција $\alpha\colon D \to Y$, која је непрекидна у тачки a и задовољава услове $\alpha(a) = 0$ и

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \|x-a\|\alpha(x); \quad x \in D.$$

2. Ако је A јак извод функције f у тачки a, доказати да је он уједно и слаб извод функције f у тачки a.

Функција f може имати највише један јак извод у тачки a. Пошто је он уједно и слаб извод, обележавамо га на исти начин као и слаб извод, дакле са $f'(a)$.

Нека је $A \in L(X;Y)$. Ако је

$$\lim_{x',x''\to a} \frac{\|f(x'')-f(x')-A(x''-x')\|}{\|x''-x'\|} = 0,$$

кажемо да је A строг извод функције f у тачки a, а за функцију f кажемо да је диференцијабилна у строгом смислу у тачки a. Ако је A строг извод функције f у тачки a, онда је A уједно јак а самим тим и слаб извод функције f у тачки a. Зато функција f може имати највише један строг извод у тачки a и обележавамо га на исти начин као и слаб и јак извод, дакле са $f'(a)$.

Задаци

3. Доказати да је ограничени линеарни оператор $A \in L(X;Y)$ строг извод функције f у тачки a ако и само ако постоји функција $\alpha\colon D\times D \to Y$, која је непрекидна у тачки (a,a) и задовољава услове $\alpha(a,a)=0$ и

$$f(x'')-f(x') = A(x''-x') + \|x''-x'\|\alpha(x',x''); \quad x',x''\in D.$$

4. Ако је ограничени линеарни оператор $A \in L(X;Y)$ слаб, јак или строг извод функције f у тачки a, доказати да он задржава то својство уколико норме простора X и Y заменимо њима еквивалентним нормама.

5. Ако је функција f диференцијабилна у јаком смислу у тачки a, доказати да је она непрекидна у тачки a.

6. Ако је функција f диференцијабилна у строгом смислу у тачки a, доказати да она задовољава Липшицов услов у некој околини те тачке.

7. Ако је $f(x) = Ax+b$, где је $A\in L(X;Y)$ и $b\in Y$, доказати да је A строг извод функције f у тачки a. (Функције овог облика називају се афине функције.)

Нека је $X=\mathbf{R}$. Ако постоји

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

називамо га (класични) извод функције f у тачки a. Обележавамо га са $f'(a)$. Пошто се у овом случају може говорити и о слабом, јаком и строгом изводу које обележавамо на исти начин, када употребљавамо ознаку за извод морамо рећи о којој се врсти извода ради (уколико то није јасно из контекста).

Задатак

8. Ако је $X=\mathbf{R}$, доказати да су диференцијабилност у класичном, слабом и јаком смислу еквивалентне, и да је пресликавање које броју $h\in R$ кореспондира вектор $hf'(a)\in Y$ јак извод функције f у тачки a. (Овде $f'(a)$ означава извод функције f у тачки a у класичном смислу.)

Извод и диференцијабилност сложене функције

Из класичног диференцијалног рачуна, који се односи на реалне функције реалне променљиве, познато је да диференцијабилност двеју функција повлачи диференцијабилност њихове композиције. Овде ћемо разматрати аналогоне класичне теореме о изводу сложене функције који се односе на слабе, јаке и строге изводе.

Теорема 1. *Нека су X, Y и Z нормирани простори, $D \subseteq X$, $E \subseteq Y$, $f\colon D \to E$, $g\colon E \to Z$, $a \in \operatorname{int} D$ и $f(a) \in \operatorname{int} E$. Ако је функција f диференцијабилна у јаком смислу у тачки a, и ако је функција g диференцијабилна у јаком смислу у тачки $f(a)$, онда је функција $g\circ f$ диференцијабилна у јаком смислу у тачки a, и при том је*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a).$$

Доказ. Уводимо ознаке $b = f(a)$, $A = f'(a)$ и $B = g'(b)$. Постоје функције $\alpha\colon D \to Y$ и $\beta\colon E \to Z$, такве да је α непрекидна у a, β непрекидна у b, $\alpha(a) = 0$, $\beta(b) = 0$ и

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + A(x-a) + \|x-a\|\alpha(x); \quad x \in D \\ g(y) &= g(b) + B(y-b) + \|y-b\|\beta(y); \quad y \in E. \end{aligned}$$

Имамо да је

$$\begin{aligned} (g\circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(b) + B(f(x)-b) + \|f(x)-b\|\beta(f(x)) \\ &= g(f(a)) + B(f(x)-f(a)) + \|f(x)-f(a)\|\beta(f(x)) \\ &= (g\circ f)(a) + B(A(x-a) + \|x-a\|\alpha(x)) + \|A(x-a) + \|x-a\|\alpha(x)\|\beta(f(x)) \\ &= (g\circ f)(a) + BA(x-a) + \|x-a\|\gamma(x), \end{aligned}$$

где је

$$\gamma(x) = B\alpha(x) + \left\| A\frac{x-a}{\|x-a\|} + \alpha(x) \right\| \beta(f(x)); \quad x \in D, x \neq a \ \text{ и } \ \gamma(a) = 0.$$

Одавде и из

$$\left\| A\frac{x-a}{\|x-a\|} + \alpha(x) \right\| \le \left\| A\frac{x-a}{\|x-a\|} \right\| + \|\alpha(x)\| \le \|A\| + \|\alpha(x)\|,$$
$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = \alpha(a) = 0 \ \text{ и } \ \lim_{x\to a} \beta(f(x)) = \beta(b) = 0,$$

добијамо да је

$$\lim_{x\to a} \gamma(x) = 0 = \gamma(a),$$

тј. да је функција γ непрекидна у тачки a. Зато је $BA = g'(f(a))\circ f'(a)$ јак извод функције $g \circ f$ у тачки a. ■

Теорема 2. *Нека су X, Y и Z нормирани простори, $D \subseteq X$, $E \subseteq Y$, $f\colon D \to E$, $g\colon E \to Z$, $a \in \operatorname{int} D$ и $f(a) \in \operatorname{int} E$. Ако је функција f диференцијабилна у строгом смислу у тачки a, и ако је функција g диференцијабилна у строгом смислу у тачки $f(a)$, онда је функција $g{\circ}f$ диференцијабилна у строгом смислу у тачки a, и при том је*

$$(g{\circ}f)'(a) = g'(f(a)){\circ}f'(a).$$

Доказ. Уводимо ознаке $b = f(a)$, $A = f'(a)$ и $B = g'(b)$. Постоје функције $\alpha\colon D \times D \to Y$ и $\beta\colon E \times E \to Z$, такве да је α непрекидна у (a, a), β непрекидна у (b, b), $\alpha(a, a) = 0$, $\beta(b, b) = 0$ и

$$\begin{aligned} f(x'') - f(x') &= A(x'' - x') + \|x'' - x'\|\alpha(x', x''); \quad x', x'' \in D,\\ g(y'') - g(y') &= B(y'' - y') + \|y'' - y'\|\beta(y', y''); \quad y', y'' \in E. \end{aligned}$$

Имамо да је

$$\begin{aligned} (g{\circ}f)(x'') - (g{\circ}f)(x') &= g(f(x'')) - g(f(x'))\\ &= B(f(x'') - f(x')) + \|f(x'') - f(x')\|\beta(f(x'), f(x''))\\ &= B(A(x'' - x') + \|x'' - x'\|\alpha(x', x'')) + \|A(x'' - x') +\\ &\qquad + \|x'' - x'\|\alpha(x', x'')\|\beta(f(x'), f(x''))\\ &= BA(x'' - x') + \|x'' - x'\|\gamma(x', x''), \end{aligned}$$

где је

$$\gamma(x', x'') = B\alpha(x', x'') + \left\| A\frac{x'' - x'}{\|x'' - x'\|} + \alpha(x', x'')\right\| \beta(f(x'), f(x''));$$
$$x', x'' \in D, x' \neq x'' \ \text{ и } \ \gamma(x, x) = 0; \ x \in D.$$

Одавде и из

$$\left\| A\frac{x'' - x'}{\|x'' - x'\|} + \alpha(x', x'')\right\| \le \left\| A\frac{x'' - x'}{\|x'' - x'\|}\right\| + \|\alpha(x', x'')\| \le \|A\| + \|\alpha(x', x'')\|,$$
$$\lim_{x', x'' \to a} \alpha(x', x'') = \alpha(a, a) = 0 \ \text{ и } \ \lim_{x', x'' \to a} \beta(f(x'), f(x'')) = \beta(b, b) = 0,$$

добијамо да је

$$\lim_{x \to a} \gamma(x', x'') = 0 = \gamma(a, a),$$

тј. да је функција γ непрекидна у тачки (a, a). Зато је $BA = g'(f(a)){\circ}f'(a)$ строг извод функције $g{\circ}f$ у тачки a. ∎

Теорема 3. *Нека су X, Y и Z нормирани простори, $D \subseteq X$, $E \subseteq Y$, $f\colon D \to E$, $g\colon E \to Z$, $a \in \operatorname{int} D$ и $f(a) \in \operatorname{int} E$. Ако је функција f диференцијабилна у слабом смислу у тачки a, и ако је функција g диференцијабилна у* *јаком смислу у тачки* $f(a)$, *онда је функција* $g{\circ}f$ *диференцијабилна у слабом смислу у тачки* a, *и при том је*

$$(g{\circ}f)'(a) = g'(f(a)){\circ}f'(a).$$

Доказ. Уводимо ознаке $b = f(a), A = f'(a)$ и $B = g'(b)$. Постоји функција $\beta\colon E \to Y$ која је непрекидна у тачки b, таква да је $\beta(b) = 0$ и

$$g(y) = g(b) + B(y-b) + \|y-b\|\beta(y); \quad y \in E.$$

Нека је $h \in X$. Тада за $t > 0$ имамо да је

$$\begin{aligned} \frac{(g{\circ}f)(a+th) - (g{\circ}f)(a)}{t} &= \frac{g(f(a+th)) - g(f(a))}{t} \\ &= \frac{B(f(a+th) - f(a)) + \|f(a+th) - f(a)\|\beta(f(a+th) - f(a)\|}{t} \\ &= B\frac{f(a+th)-f(a)}{t} + \left\|\frac{f(a+th)-f(a)}{t}\right\|\beta\left(\frac{f(a+th)-f(a)}{t}t\right). \end{aligned}$$

Одавде и из

$$\lim_{t\to 0+} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = f'(a;h) = Ah,$$

следи да је

$$\lim_{t\to 0+} \frac{(g{\circ}f)(a+th) - (g{\circ}f)(a)}{t} = Bf'(a;h) = BAh.$$

Дакле, за свако $h \in X$ имамо да је $(g{\circ}f)'(a;h) = BAh$. Следи да је $BA = g'(f(a)){\circ}f'(a)$ слаб извод функције $g{\circ}f$ у тачки a. ∎

Теорема 4. *Нека су* Y *и* Z *нормирани простори,* $D \subseteq R$, $E \subseteq Y$, $f\colon D \to E$, $g\colon E \to Z$, $a \in \operatorname{int} D$ *и* $f(a) \in \operatorname{int} E$. *Ако је функција* f *диференцијабилна у класичном смислу у тачки* a, *и ако је функција* g *диференцијабилна у јаком смислу у тачки* $f(a)$, *онда је функција* $g{\circ}f$ *диференцијабилна у класичном смислу у тачки* a, *и при том је*

$$(g{\circ}f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Доказ. Уводимо ознаке $b = f(a)$ и $B = g'(b)$. Постоји функција $\beta\colon E \to Y$ која је непрекидна у тачки b, таква да је $\beta(b) = 0$ и да је

$$g(y) = g(b) + B(y-b) + \|y-b\|\beta(y); \quad y \in E.$$

Имамо да је

$$\begin{aligned} \frac{(g{\circ}f)(x) - (g{\circ}f)(a)}{x-a} &= \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} \\ &= \frac{B(f(x) - f(a)) + \|f(x) - f(a)\|\beta(f(x)\|}{x-a} \\ &= B\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{\|f(x)-f(a)\|}{x-a}\|\beta(f(x)\|. \end{aligned}$$

Одавде, из

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),\qquad \lim_{x\to a}\beta(f(x))=\beta(b)=0,$$

и чињенице да је израз $\|f(x)-f(a)\|/(x-a)$ ограничен, која следи из

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{\|f(x)-f(a)\|}{x-a}\right|=\lim_{x\to a}\left\|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\|=\|f'(a)\|,$$

добијамо да је

$$\lim_{x\to a}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(a)}{x-a}=Bf'(a),$$

тј. да је

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a).\quad\blacksquare$$

Задаци

9. Нека су X, Y и Z нормирани простори, $D\subseteq X$, $E\subseteq Y$, $f\colon D\to E$, $g\colon E\to Z$, $a\in\operatorname{int}D$ и $f(a)\in\operatorname{int}E$. Ако је функција f афина, и ако је функција g диференцијабилна у слабом смислу у тачки $f(a)$, онда је функција $g\circ f$ диференцијабилна у слабом смислу у тачки a, и при том је

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))\circ f'(a).$$

10. Нека су Y и Z нормирани простори, $D\subseteq R$, $E\subseteq Y$, $f\colon D\to E$, $g\colon E\to Z$, $a\in\operatorname{int}D$ и $f(a)\in\operatorname{int}E$. Ако је функција f афина, и ако је функција g диференцијабилна у слабом смислу у тачки $f(a)$, онда је функција $g\circ f$ диференцијабилна у класичном смислу у тачки a, и при том је

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a).$$