Др Шефкет Арсланагић

ВАРИЈАЦИЈЕ ДОКАЗА ЈЕДНЕ АЛГЕБАРСКЕ НЕЈЕДНАКОСТИ И ЈЕДНА ЊЕНА ПРИМЈЕНА

Неједнакост између бројних средина два позитивна броја x и y, $x \neq y$,

$$H(x,y) < G(x,y) < A(x,y) < K(x,y) \tag{1}$$

добро нам је позната и сигурно смо били у прилици понекад је и користити. Но, ову неједнакост ћемо још продужити и доказати да је

$$K(x,y) < E(x,y), \qquad x > 0,\ y > 0,\ x \neq y,$$

где је $E(x,y) = (x^x y^y)^{\frac{1}{x+y}}$. Наравно, знамо да је

$$H(x,y) = \frac{2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}, \quad G(x,y) = \sqrt{xy}, \quad A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \quad K(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Дакле, доказаћемо да је

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} < (x^x y^y)^{\frac{1}{x+y}}, \qquad x > 0,\ y > 0,\ x \neq y. \tag{2}$$

Напомена. У (1) и (2) вриједи једнакост само у случају када је $x = y$.

Прије тога ћемо дати три доказа неједнакости

$$\ln t > \frac{t^2-1}{t^2+1}, \qquad t > 1. \tag{3}$$

Доказ 1. Очигледно вриједи неједнакост

$$\frac{1}{2z} > \frac{2}{(1+z)^2}, \quad z > 1 \qquad (\iff (z-1)^2 > 0),$$

те

$$\frac{1}{2}\int_1^{t^2} \frac{1}{z}\,dz > 2\int_1^{t^2} \frac{1}{(1+z)^2}\,dz, \qquad t > 1,$$

тј. $\frac{1}{2}\ln z\Big|_1^{t^2} > 2\cdot\frac{-1}{1+z}\Big|_1^{t^2}$, а одавде $\frac{1}{2}\ln t^2 > -\frac{2}{1+t^2} + 1$, тј. $\ln t > \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $t > 1$, што значи да је неједнакост (3) тачна.

Доказ 2. Такође, очигледно вриједи неједнакост

$$\frac{1}{z} > \frac{4z}{(z^2+1)^2}, \quad z > 1 \qquad (\iff (z^2-1)^2 > 0), \tag{4}$$

те

$$\int_1^t \frac{1}{z}\,dz > \int_1^t \frac{4z}{(z^2+1)^2}\,dz, \qquad t > 1,$$

тј. $\ln z\big|_1^t > \left.\frac{-2}{z^2+1}\right|_1^t$, а одавде $\ln t > \frac{-2}{t^2+1} + 1$ и $\ln t > \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $t > 1$, а ово је (3).

Доказ 3. Разматраћемо сљедеће двије функције: $h(t) = \ln t$ и $g(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $t \geqslant 1$. Како је:

1° $h(1) = g(1) = 0$,

2° $h'(t) = \frac{1}{t}$ и $g'(t) = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$,

то на основу очигледне неједнакости (4) вриједи да је $h'(t) > g'(t)$, $t > 1$, а одавде $h(t) > g(t)$, $t > 1$, што је неједнакост (3).

Сада ћемо прећи на доказ неједнакости (2).

Не умањујући општост, можемо узети да је $x > y > 0$. Нека је $\frac{x}{y} = t$, тј. $x = ty$, $t > 1$. Сада неједнакост (2) постаје

$$\frac{1+t^2}{2} < t^{\frac{2t}{t+1}}, \qquad t > 1, \tag{2'}$$

или након логаритмовања, $\frac{2t}{1+t}\ln t > \ln\frac{1+t^2}{2}$, $t > 1$. Разматраћемо сада функцију

$$f(t) = \frac{2t}{1+t}\ln t - \ln\frac{1+t^2}{2}, \qquad t > 1,$$

при чему је $f(1) = 0$, те $f'(t) = 2\frac{(1+t^2)\ln t + 1 - t^2}{(1+t)^2(1+t^2)}$ и $f'(1) = 0$. Слиједи да је $f'(t) > 0$ ако је

$$(1+t^2)\ln t + 1 - t^2 > 0, \quad \text{тј.} \quad \ln t > \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad t > 1,$$

а ово је доказана неједнакост (3).

Дакле, имамо да је $f'(t) > 0$, $t > 1$, што значи да је функција $f(t)$ строго растућа. Вриједи $f(t) > f(1) = 0$, тј.

$$\frac{2t}{1+t}\ln t - \ln\frac{1+t^2}{2} > 0, \qquad t > 1,$$

односно $\frac{1+t^2}{2} < t^{\frac{2t}{1+t}}$, $t > 1$, што значи да је неједнакост (2') тачна, па је и неједнакост (2) тачна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Arslanagić, Š., *Kako dokazivati algebarske nejednakosti*, Naša škola (Sarajevo), 46, 13 (2000), 101–118.

[2] Арсланагић, Ш., *Нејендакости између бројних средина и њихова примјена*, Тангента 5, 17 (1999–2000), 1–13.

[3] Mitrinović, D. S.. *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[4] Pečarić, J., *Nejednakosti*, mala matematička biblioteka, 6, Hrvatsko matematičko društvo, Element, Zagreb.