НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ
2005, L, 4, стр. 5–12

Др Милосав М. Марјановић

ДИДАКТИЧКА АНАЛИЗА – ПЛАН ЗА РАЗМАТРАЊЕ

Резиме. Скициран је целовит курс (дидактике) математике за учитеље и наставнике, инспирисан идејом Фројденталове дидактичке феноменологије. Заснована на историји математике и образовања, математике као науке и психологији, дидактичка анализа садржаја је посматрана као језгро таквог курса. Само на основу те анализе могуће је истинско обликовање дидактичке транспозиције садржаја које би, затим, било широко прихваћено од учитеља.

Размотрена је и посебно спорна тема – основе математичке логике у школи. Предложен је начин разраде који повезује садржаје присутне у школској математици следећи њихову интерпретацију, а без употребе истинитосних таблица.

Садржаји који се разматрају

- Улога математике у курсу за образовање учитеља и наставника.
- Обједињавање историје математике, математичког садржаја и методике наставе математике.
- Битни садржаји курсева за образовање учитеља који се односе на геометрију, број и логику.

1. Залагање за дидактичку анализу садржаја

Математика се често посматра као нешто непромењливо и окамењено. Са такве тачке гледишта би следило да наставници треба да науче само још једну ствар – како да је пренесу на своје ученике. Изјашњавајући се против тога, почињемо са главним тачкама овог чланка.

Сви садржаји школске математике имају један од следећих аспеката:

- ◦ историјски – када се они виде какви су некада били, *in statu nascendi*[1]
- ◦ научни – када се они виде изложени на логички компактан начин,
- ◦ дидактички – када се они транспонују тако да буду подесни за учење.

У вези са широко прихваћеним принципом да развој јединке следи развој врсте, извесна упознатост учитеља и наставника с главним чињеницама из историје

Превод чланка *"Didactical analysis—a plan for consideration"*, приказаног на 10. конгресу о настави математике ICME–10, Копенхаген, 4–11. јули 2004, и објављеног у часопису The Teaching of Mathematics, Vol. VI, 2, стр. 97–104. Превео В. Мићић.

[1] у стању настајања (лат.)

математике (и образовања) неоспорно је важна. Подесан избор таквих чињеница би увек зависио од специфичних садржаја.

Добро познавање научног аспекта служи стручњаку из методике математике да изврши логичку анализу релевантних садржаја. Другим речима, такво знање је основа на којој се прецизира значење основних математичких појмова, што помаже таквом стручњаку да избегне формирање квази-појмова и искривљавање значења (тако често присутно у уџбеницима за почетну наставу). У извесном степену такво знање се може сматрати корисним чак и за учитеље.

Ако су историја математике и математика као наука два стуба на којима стоји дидактичка анализа, трећи је наука о учењу и искуство у образовној пракси. Истраживања начина на који ми опажамо и схватамо била су традиционална преокупација философије. Данас, изложена експерименталним верификацијама, она су, претежно, предмет психологије. Фигуративно говорећи, психолози нам обезбеђују међаше који одређују овај домен интересовања, али нам они не могу рећи како да га „поплочамо“. Ово поплочавање је суштина дидактичке анализе.

Прегледање уџбеника из више земаља је најбољи пут да се сагледа стање математичког образовања у његовој најрелевантнијој реалности. Уочава се да су уџбеници за основну школу пуни грешака и, уопште, срећу се бројна погрешна тумачења. Ослањајући се на традиционалне курсеве методике математике многи аутори ових књига показују потпун недостатак продубљеног знања о садржају. Стога, без двоумљења, дидактичка анализа главних тема школске наставе математике треба да буде језгро свих курсева методике математике. Ово би оспособљавало студенте на образовним институцијама да достигну мајсторство у познавању предметних садржаја, тако да касније, када се нађу у одељењу, буду у стању да следе дидактичке транспозиције тих тема са потпуним разумевањем. Можда би то могло да их охрабри да развију критичко мишљење уместо прихватања здраво за готово свега што им говоре разнोразни „експерти“? Ако ова запажања указују на узнемиравајућу стварност у наставној пракси, она исто тако указују на образовање учитеља и наставника као на почетак сваке промене.

Очигледно је да је наше залагање за дидактичку анализу под непосредним утицајем ставова Ханса Фројдентала. Изрази „логичка анализа садржаја“, „дидактичка феноменолошка анализа“, „дидактичка феноменологија“ указују на она места у његовим књигама ([2], [3]) где су формирани елементи дидактичке феноменологије математичких појмова. Феноменологија, развијена од стране Едмунда Хусерла, инсистира на интуитивном заснивању и верификацији појмова, без обазирања на традиционална епистемолошка питања.

Будући да ми предлажемо прилаз дидактичкој анализи „одоздо“, представићемо овде избор релевантних тема и веза које их обједињују, одражавајући унутрашњу целовитост садржаја. Сагласно с таквим ставом уздржаћемо се од формулисања општих закључака и запажања раздвојено од њихове основе у конкретном материјалу који се обрађује. Корени ових запажања налазе се у ауторовом искуству, заснованом на курсевима које је предавао студентима учитељских факултета и семинарском раду с њима у којем су они анализовали и критиковали постојеће уџбенике а затим уобличавали делове дидактичке транспозиције, које су проверавали кроз своју школску праксу.

У школи су ови студенти учили еуклидску геометрију која почиње са недефинисаним појмовима и претпостављеним односима међу њима. Овом приступу кроз научно излагање требало би супротставити геометријске активности посматрања, обликовања и цртања, што детету помаже да стигне до основног разумевања тих појмова. Постојећа пракса да се такви студенти упућују на додатне курсеве математике је дискутабилна – не изгледа ли боље да се они упуте на учење поново онога што већ знају, али на продубљени начин?

2. Анализа геометрије за млађе разреде основне школе

Ако је школска геометрија у основи нека верзија еуклидске геометрије, без обзира колико поједностављене, онда би геометријске садржаје у програмима за млађе разреде основне школе[2] требало звати „предгеометрија“. Захваљујући Ж. Пијажеу и његовим експерименталним резултатима, сада знамо да дете спонтано развија своје сопствене интуитивне геометријске идеје у редоследу: тополошке – пројективне – еуклидске. (За математички засновано излагање ових идеја видети чланак у “The Teaching of Mathematics, vol. IV, 1, pp. 41–70”; видети и на `http://www.komunikacija.org.yu/teachmat_e`.) Извесно је да су ти резултати дали важан подстицај избору и сређивању предгеометријских тема.

2.1. Историја – списак тема.

- Преглед активности човечанства из археолошке прошлости: обликовање камених алатки, декорације на керамичким предметима, слике на зидовима пећина. Дизајни на тлу које праве људи који припадају примитивним цивилизацијама. Облик као својство објеката реалног света. Геометрија у преисторијским цивилизацијама (Далеки исток, Средњи исток, Стари Египат).
- Рађање првих грчких школа. Талесов доказ да је угао уписан у полукруг прав и почеци логичког мишљења. Питагора и схватање да су математички објекти апстрактне идеје. Питагорино схватање математике као суштинске структуре универзума. Ератостеново израчунавање дужине Земљиног меридијана (упоређено са привидном и фантазијском Хомеровом сликом света). Еуклидови „Елементи“ и геометрија схваћена као затворен систем који садржи узроке њених сопствених факата. Грчки појам једнакости површина и запремина.

Коментар. *Изабране теме из историје геометрије би требало да изложе порекло математичких појмова који се односе на садржаје из млађих разреда основне шоле. Иначе, без трагања за њиховим интуитивним значењем, геометријске чињенице и аксиоме, узете као истине прихватљиве* a priori*, воде у мистификацију и нераумевање.*

[2] У даљем ћемо, скраћено, говорити „основне школе“.

2.2. Уводни појмови из психологије – списак тема.

- Функција ока (сличности и разлике са камером). Интерпретација опажања. Принципи опажања. Кључеви који омогућују сагледавање дубине.
- Појмови као троделни ентитети који, као своје саставне делове, имају: одговарајућу класу примера, менталну слику и име (укључујући и могући симбол (знак)). Брунерове врсте репрезентација: енактивна, иконичка и симболичка. Иконичка и симболичка репрезентација појмова. Геометријски цртежи као иконички знаци.
- Упоређивање појмова према њиховом степену апстрактности. Појам скупа као најопштији појам у односу на све остале појмове класичне математике. Нивои апстрактности. Појмови на опажајном нивоу.
- Дефиниције као реченице које одређују неки појам преко другог појма вишег реда, уз исказивање специфичне разлике (*differentia specifica*). Тенденције да се прерано дефинише или доказује.
- Онтогенетски развој говора према Л. С. Виготском ([6]). Спонтани и научни појмови. Системи појмова. Структуре и когнитивне схеме.

Коментар. *Претпоставља се, такође, да су студенти одслушали један или више курсева психологије. Овај списак представља избор оних тема које су посебно корисне, и ефективно објашњиве преко садржаја геометрије и аритметике у млађим разредима основне школе.*

2.3. Набрајање геометријских садржаја.

- Инхерентна геометрија и значење речи које означавају место, позиционе односе објеката у природном окружењу, смерове кретања итд.
- Перцепција просторних објеката и формирање геометријских идеја. Однос „објект – појам“ и реверзибилност дечјег мишљења.
- Интуитивно описивање и разликовање тополошких, пројективних и еуклидских својстава.
- Условљено и намерно игнорисање просторних простирања и формирање појмова: тачка, линија, површ. Односи инциденције: тачка-линија, тачка-површ, линија-линија.
- Праве линије и криве линије (као пројективни појмови). Отворене криве и затворене криве (тополошки лук и тополошки круг). Препознавање геометријских облика: дуж, кружна линија, правоугаоник, квадар (паралелепипед), цилиндар, лопта. Улога ових облика у активностима упоређивања: дужи, шири, виши од, итд.

Коментар. *Сви предгеометријски појмови су на опажајном нивоу инхерентни у свету реалних објеката и иконичких репрезентација. Стога процес учења иде од посматрања према разумевању, па би прецизан начин вербалног изражавања требало да разликује посматране ствари од научних појмова у раној фази њиховог изграђивања. Представљање емпиријских ситуација помоћу геометријских цртежа елиминише постојећи шум и отвара пут према апстракцији. Такве активности помажу детету да среди своје сопствене мисли о структури света који га окружује и дешавањима у њему.*

3. Анализа основношколске аритметике

У данашње време се види да су аритметичке књиге претрпане лепим илустрацијама. Опчињени њиховом лепотом, могли бисмо лако превидети како је из њих систематско излагање аритметике готово ишчезло. Нема ничег ретроградног у томе да призовемо следеће дидактичке максиме Песталоцијевих следбеника из 19-ог века:

- Крајњи циљ наставе аритметике је изградња апстрактних појмова.
- Појам броја мора бити формиран на основи која обезбеђује значење и очигледност.
- Ова основа се не сме претворити у пуку играрију.

Како су они били у праву, тада као и сада!

Изражавајући наше уверење да деца уче аритметику с јасноћом и лакоћом само када је она на прави начин структурирана и обрађена са пуно пажње и финих детаља, пажњу поново обраћамо на дидактичку анализу.

3.1. Историја – списак тема.

- Граматички облици у савременим језицима који указују на постојање малих бројевних система у предисторијским културама. Бројеви као човекови примарни појмови. Вавилонски бројевни систем. Египатски бројевни систем. Грчки (александријски) начин записивања бројева. Индијско-арапски позициони систем и његово ширење у Европу. Паралелни развој идеја о бројевима као количницима целих бројева и односима величина. Откриће несамерљивих величина. Виетова *logistica speciosa*. Декартова „координација“ праве. Развој аритметичких ознака. Децимални разломци. Изградња симболичке алгебре.
- Образовно наслеђе: грчка *logistica numerosa*, средњевековна сколастика, визуелни метод Коменског, Песталоцијева дидактика – бројеви, облици и речи као основа елементарног образовања, подела на блокове бројева фон Рохова, Грубеов монографски метод итд.

Коментар. *Природни бројеви и њихови односи су се увек односили на дискретне реалности (укључујући све врсте скала на које се величине мерљивих ствари транспонују). Међутим, дужине, површине и запремине чисто геометријских објеката су носиоци значења реалних објеката.*

3.2. Набрајање аритметичких садржаја.

- Скупови на опажајном нивоу. Асимилација речи „скуп“, „елемент“. Канторов когнитивни принцип инваријантности броја – „убијање“ две врсте шума, присутне код колекција ствари које се могу опажати: природе елемената које треба бројати и било које врсте њихове организације.
- Изградња блокова бројева (до 10, 20, 100, ...). Улога једноставних аритметичких израза који изначавају збирове и производе као средство проширивања блокова. Блокови као системи међусобно повезаних појмова. Специфични дидактички проблеми који се природно појављују при таквој изградњи блока: процедурално заснивање главних правила аритметике у моментима

кад су специјално оперативни и њихово реторичко изражавање, коришћење правила као основе за објашњења аритметичких поступака који се изводе, формирање аритметичких таблица, итд.

- Улога држача места у реализацији процедуралних задатака аритметике. Слова у улози непознатих. Једноставне једначине и њихово решавање засновано на међузависности операција. Даљи кораци у развијању идеје променљиве. Симболичко изражавање главних правила аритметике, итд.

Коментар. *Цео процес учења аритметике мора се посматрати на начин који почиње стварима које се опажају, наставља се коришћењем иконичких знакова који су значећи за појмове и завршава се симболичким кодовима аритметике. Цитирајући Хусерла, природни бројеви и четири операције нису „готови производи", већ треба да буду синтетизовани у свести ученика кроз брижљиво планиране и вођене активности. Сваки појединачни број је појам за себе и, користећи се операцијама, они постају међусобно повезани, формирајући системе (структуре) почетних блокова. Девијантне савремене тенденције игнорисања фундаменталне улоге ових система умањују разумевање и остављају неке суптилне делове аритметике да никад не буду обрађени.*

До сада смо покушали да дамо скицу, нипошто потпуну, дидактичке анализе двеју великих тема основношколске математике. Следећи уобичајени ток идеја, требало би обрадити теме као даља проширења бројевних система и њихово структурирање, развој кључне идеје променљиве, итд. Но, сада ћемо оставити таква разматрања по страни и скренути наше разматрање на специјално контроверзну тему – логика у школи.

4. Основе математичке логике

Развој логичког мишљења је увек наглашаван као један од главних циљева математичког образовања. Широко посматрано, ово мишљење укључује способност апстраховања, прецизно коришћење научених појмова, и способност формирања и логичког вредновања сложених реченица. У свакодневном говору, две реченице се комбинују, стварајући трећу, помоћу везника „и", „или", „ако … тада … ". Логичка функција тих везника се учи спонтано, кроз говор. У образовној пракси неких земаља се још одржава овај традиционални прилаз спонтане асимилације логичких функција везника. Али, са порастом комплексности реченица које изражавају разне математичке услове, посебно у симболичкој форми, расте потреба за прецизном употребом ових речи. Чињеница да у природном језику ови везници повезују, како парове речи или фраза, тако и скраћене облике реченица које често имају различите субјекте, чини ову потребу за прецизирањем још битнијим дидактичким задатком.

У иновационом периоду за време „Нове математике" (*New Maths*), основи математичке логике су уведени у школске програме у облику који се налази у научним излагањима. У програмима у којима су се одржали, налазимо те основе како почињу истинитосним таблицама и словима која означавају исказе. Дају се задаци типа „одредити истинитосну вредност од" (и ученици их лако решавају).

Ова ситуација постаје проблематична када се слова која означавају исказе замене тврђењима која нешто значе. Тада се, на пример, обе импликације

$$1 > 2 \implies 3 < 4, \qquad 1 > 2 \implies 3 > 4$$

прихватају као тачне, и тада та правила почињу да изгледају као да су произвољно бирана. Без јасне узрочно-последичне везе, оваква сложена тврђења нормално ђаци доживљавају као апсурдна, пре него као тачна. Подсећајући да све сложене реченице које налазимо у математици имају или реторичке променљиве као субјекте (случај геометрије), или су то предикатске формуле које садрже једну или више променљивих (случај алгебре), разматраћемо сад главни недостатак оваквог прилаза логици. Оне реченице које су носиоци неког значења (Раселова реченица), одређују пропозиционе функције које у свакој тачки свог домена дефинисаности имају исказе као своје вредности. Зато, прелаз са пропозиција на пропозиционе функције је један још наглији скок него што је то у алгебри прелаз са бројевних на словне изразе. Без разумевања улоге логике у раду са реченицама које имају променљиве као свој субјекат, логика у школи може изгледати као бескорисна тема. Формално излагање које почиње истинитосним таблицама сигурно није одговарајућа дидактичка транспозиција ове теме.

Уобичајено је да развој логичког мишљења у овом ужем смислу почиње на почетку Пијажеовог периода формалних операција и треба га настављати кроз читав тај период. Упркос чињеници да постоји велики број истраживачких радова који обрађују питање учења основа логике у школи, не постоје опште прихваћена концепција и план увођења логичких садржаја у математичке курсеве. Ови садржаји су свакако имплицитно садржани у дугорочним темама школске математике као што су решавање једначина и њихових система, решавање неједначина, итд. И управо кроз такве теме треба почети са промишљеним увођењем основа математичке логике. Изостављајући детаље и ступњеве обраде, скицираћемо главне идеје плана излагања, користећи апстрактан језик математичке логике (уместо његове замене у виду адекватнијих термина дидактичке транспозиције ове теме).

- Синтаксу математичке логике треба видети као уопштење алгебарског језика.
- Значење везника „и“, „или“ и „не“ треба повезати са скуповним операцијама „пресек“, „унија“ и „комплемент“.
- Само реченице које имају исти субјекат треба повезивати у сложене реченице. (У најједноставнијем случају такве реченице су: „x припада A“, „x припада B“.)
- У почетном стадијуму разраде, везници „ако и само ако“ и „ако … тада … “ интерпретирају се као релације у скупу пропозиционих функција, а не као логичке операције. Тада, налажењем истинитосних скупова, ови везници се повезују, редом, са једнакошћу и инклузијом скупова.
- Сва излагања треба да су суштински укључена у математичке садржаје, служећи њиховом пречишћавању.
- Ово је још једна ситуација у којој се појам скупа показује корисним алатом у формирању појмова.

Насупрот основама теорије скупова, које су нашле своје право место и стварну дидактичку транспозицију у савременим школским програмима, основе математичке логике још увек чекају адекватну елаборацију, која ће се поступно развити кроз низ дидактичких трансформација, које би долазиле једна за другом .

ЛИТЕРАТУРА

1. Howson, A. G. (Ed.), *Developments in Mathematical Education*, Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, C.U.P., Cambridge, 1973.

2. Freudenthal, H., *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, 1973.

3. Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*, D. Reidel Publishing Company, 1978.

4. Husserl, E., *Meditations Cartesiennes*, Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1966.

5. Колмогоров, А. Н., *Математика – наука и профессия*, Библиотечка «Квант», Москва, 1988.

6. Выготский, А. С., *Мишление и речь*, Избранные психологические исследования, Москва, 1956.