Др Владимир Мићић

УЧЕЊЕ ОТКРИВАЊЕМ – МОЖДА НОВИ ПРИСТУП

Увод. У свом надахнутом пленарном предавању на Четвртом интернационалном конгресу о настави математике, Беркли (САД) 1980. ([1]), Ханс Фројдентал (Hans Freudenthal), један од водећих дидактичара математике XX века, навео је неколико важних проблема наставе математике. Међу њима срећемо (под бројем пет) следећи: „Како подстицати размишљања о нечијим сопственим физичким, менталним и математичким активностима?“. У овом задатку, постављеном пред онога ко треба да унапреди наставни процес у области наставе математике, препознајемо залагање аутора за уважавање свих карактеристика ученика приликом усвајања добрих, прихватљивих метода у наставној пракси. На том путу можемо у литератури срести бројне препоруке, које се односе на начине извођења наставе и начине учења. Без претензија да идентификујемо начине учења кроз које се доприноси остваривању наведеног циља и задатка наставе математике, наглашавамо да „учење и обучавање с разумевањем“, које срећемо у већини покушаја да се изврши нека класификација начина учења и обучавања у области математике (видети детаљније у раду Хиберта и Карпентера (James Hiebert, Thomas Carpenter) ([2]), несумњиво припада таквом начину. Мотивације за учење математике, спољашње и унутрашње, морају се прихватити као значајна компонента у достизању поменутог циља. Ово је уверљиво објашњено у познатој књизи Р. Скемпа (Richard Skemp) ([3]).

Учење откривањем. У педагошко-психолошкој литератури, у оквирима когнитивних модела, по правилу, као веома успешан, понекад и као „најбољи начин за учење нових појмова у математици и другим предметима“ ([4], [5]) истиче се *учење откривањем* (discovery learning). Жеља нам је да полемишемо с таквим приступом и предложимо нешто модификовани појам учења који би, можда, могао да се назове учење откривањем. У разматарној проблематици познат је и веома утицајан Ј. Брунер (Jerome Bruner). Према њему ([6]) учење откривањем је начин учења у којем ученици самосталним активностима откривају основна правила и принципе. Брунер при томе сматра да наставник треба да креира проблемску ситуацију која ће подстаћи ученике да питају, истражују, експериментишу и тим путем дођу до открића. Модификација овог начина учења је тзв. *вођено учење*

Према: V. Mićić: “Discovery learning—probably a new approach”, Proceedings of the 16th Panhellenic Conference on Mathematical Education, Larisa 1999, pp. 114–117

откривањем (guided discovery learning) у којем наставник даје упутства, интервенише у поступку учења. Важно је нагласити да је сам Брунер сматрао да овакав начин учења није подесан у свим ситуацијама, често је непрактичан и нерационалан. Разраду ових дефиниција наћи ћемо у књизи Ресника и Форда (Lauren Resnick, Wendy Ford) ([4]) у облику:

- учење откривањем је стратегија учења у оквиру које се ученицима обезбеде, учине доступним сви релевантни материјали или предзнања у вези са новим појмом или проблемом и затим се они пусте да „лутају“ и тестирају идеје док самостално не открију (жељена или очекивана) правила или односе;
- вођено учење откривањем је стратегија учења у оквиру које наставник води ученике кроз све кораке или услове који воде до закључка, али их оставља да самостално дођу до актуелног (жељеног или очекиваног) правила.

Можемо се сложити да су ови начини учења ефикасни и корисни и да на такав начин усвојени појмови и стечена знања имају карактер солидно утмељених и трајно употребљивих активних компонената менталног склопа ученика. Њихови недостаци, као што су могући промашаји, опширне припреме, значајан број ученика који, због својих просечних способности, неће стићи до циља, што може деловати обесхрабрујуће, итд, захтевају од наставника математике опрез и пажљиво осмишљавање садржаја и услова који погодују примени ових метода.

Нама смета, дозволили бисмо себи да кажемо да нам „боде уши“, назив. У свакодневном говору реч *откриће* има темељно искристалисано значење и противимо се називању открићем сваког правила или својства до којег ученик, доведен од стране наставника у одговарајуће стање упитаности о томе, дође самостално или уз помоћ наставника. Уверили смо се кроз наставну праксу у области математике да ученици (али и наставници) нису склони таквом придавању важности чињеницама до којих су дошли. Ученик петог разреда ће, користећи се претходно усвојеним знањима о: комутативности операције сабирања у скупу природних бројева, дељењу збира, проширивању разломака и сабирању разломака, без тешкоћа исписати низ једнакости (можда уз малу помоћ наставника)

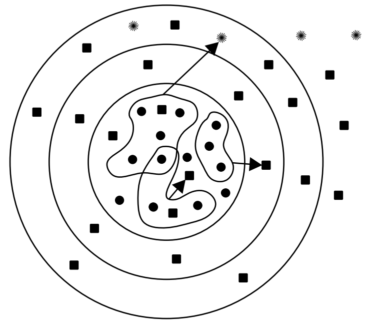
$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{p\cdot s}{q\cdot s}+\frac{r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{p\cdot s+r\cdot q}{s\cdot q}=\frac{r\cdot q+p\cdot s}{s\cdot q}=\frac{r\cdot q}{s\cdot q}+\frac{p\cdot s}{s\cdot q}=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}$$

и тиме доказати комутативност операције сабирања у скупу позитивних разломака. Њему, међутим, не пада на памет помисао да је нешто открио. Он је само потврдио да је тачно нешто што је и очекивао. Заиста, ово је само један од корака у изградњи структуре позитивних разломака. Сложићемо се с њиме; *ово није откриће* и учење у току којег је ученик у свој ментални свет трајно или за дуже време „ускладиштио“ правило „Сабирање је комутативно у $\mathbf{Q}^+$“ није оправдано звати учење откривањем, иако се цео поступак може подвести под раније наведене дефиниције таквог учења.

Открића. Подсетимо се неких значајних открића које можемо набројати у области природних наука и математике. Проналазак точка, Архимедова када, Њутнова јабука, Ајнштајнова теорија релативности, Марија Кири и проналазак радиоактивности, итд; несамерљивост дијагонале и странице квадрата, Архимедов метод исцрпљивања, Декартов метод координата, Њутнов диференцијални и интегрални рачун, нееуклидска геометрија Лобачевског, теорија Галуа, итд. Сложићемо се за сваки од ових корака у развоју цивилизације да представљају открића, и то значајна. Она представљају „камене међаше“ у односним областима и резултирала су значајним помацима, узлетима и процватима наука, давала импулсе даљем развоју. Нека од њих су била резултат дуготрајних, напорних трагања, нека су представљала изненађење, била резултат дубоког разумевања појава и процеса, настајала захваљујући инспирацији обдареног појединца и сл. Свима је заједничко да су, засигурно, била праћена вишестраним и вишеслојним емоцијама, доносила радост и одушевљење, олакшање и задовољство, итд.

„Откриће“ у настави математике. Предлажемо да се као *„откриће“ у настави математике* прихвати сазнање уз које се може придружити нека од наведених карактеристика правих открића. Дакле, то треба да буду чињенице које можемо, бар локално, у оквирима неке математичке дисциплине или неког сегмента, прихватити као међаш, важну истину која има значајне последице у даљем развоју те дисциплине или у дубљем сазнавању света, како света реалних објеката, тако и света апстрактних математичких објеката, ... Уочићемо да смо се користили речима: међаш, важна истина, значајне последице, дубље сазнавање, али и тачкама под које се може и штошта друго подвести. То, наравно, нису добро дефинисани појмови, расплинути су и од субјективне процене зависи хоћемо ли некој чињеници „признати“ да јој припада неки (или више) од наведених атрибута. А то је ствар договора или ствар укуса. Можемо ли се ипак договорити око неких елемената поменутог просуђивања, када су у питању садржаји из одређеног наставног плана и програма?

На слици 1 смо кружним линијама ограничили садржаје узастопних разреда, кружићима познате чињенице а квадратићима и звездицама нове чињенице, до којих ученик, који се налази у разреду означеним најмањим кругом, долази у процесу учења самостално или уз помоћ наставника. Квадратићи представљају оне од таквих чињеница којима не можемо придружити неки од раније поменутих атрибута, док смо звездицама означили оне од њих којима то можемо.


Сл. 1

Видимо да је звездица мало (наша субјективна оцена) и смештене су у посматраном моделу „далеко“ од места (разреда) на којем се ученик налази. Овде срећемо појам „далеко“ који такође захтева нашу сагласност, договор. Значи ли то „бар у следећем разреду“ или, можда, „бар два разреда даље“? И зашто се определити за такво разликовање? Читалац ће можда упитати: где је ту настава математике? Слика и њено тумачење имају општији карактер, не односе се само на наставу математике, иако бисмо тешко умели да је осмислимо преко конкретних садржаја из других наставних дисциплина. А из математике?

Пример. Подсетимо се да је појам обима троугла присутан (према нашем наставном плану и програму) у трећем разреду основне школе. Може се очекивати да готово сви ученици тог разреда успешно реше следећи задатак.

Задатак 1. Дат је троугао чије су дужине страница мерених центиметрима, 3, 5 и 6 (дакле, $3\,\mathrm{cm}$, $5\,\mathrm{cm}$ и $6\,\mathrm{cm}$). Наћи обим тог троугла.

Ученици знају да, у циљу налажења обима, треба сабрати мерне бројеве 3, 5 и 6 и нађени збир именовати центриметрима. Наћи ће збир 14 и обим $o = (3+5+6)\,\mathrm{cm} = 14\,\mathrm{cm}$.

Мала модификација овог задатка довешће ученике у сасвим другу ситуацију (видети [7]).

Задатак 2. Дужине страница троугла, мерене центиметрима, изражавају се природним бројевима а његов обим је једнак $14\,\mathrm{cm}$. Наћи бар два таква неподударна троугла.

Ученици који знају појам обима закључиће да треба број 14 предатвити као збир три природна броја и затим конструисати, ако је то могуће, троугао чији ће мерни бројеви страница бити управо ти бројеви.

Прелиминарна активност наставника. Решићемо општији задатак, наћи све такве троуглове и међу њима уочити неподударне, односно подударне троуглове. При томе ћемо се прво користити методом набрајања. Јасно је да се број 14 може написати у облику збира три природна броја на следеће начине:

$1+1+12$	$2+1+11$	$3+1+10$	$4+1+9$	$5+1+8$	$6+1+7$
$1+2+11$	$2+2+10$	$3+2+9$	$4+2+8$	$5+2+7$	$6+2+6$
$1+3+10$	$2+3+9$	$3+3+8$	$4+3+7$	$5+3+6$	$6+3+5$
$1+4+9$	$2+4+8$	$3+4+7$	$4+4+6$	$5+4+5$	$6+4+4$
$1+5+8$	$2+5+7$	$3+5+6$	$4+5+5$	$5+5+4$	$6+5+3$
$1+6+7$	$2+6+6$	$3+6+5$	$4+6+4$	$5+6+3$	$6+6+2$
$1+7+6$	$2+7+5$	$3+7+4$	$4+7+3$	$5+7+2$	$6+7+1$
$1+8+5$	$2+8+4$	$3+8+3$	$4+8+2$	$5+8+1$	
$1+9+4$	$2+9+3$	$3+9+2$	$4+9+1$		
$1+10+3$	$2+10+2$	$3+10+1$			
$1+11+2$	$2+11+1$				
$1+12+1$					

$7+1+6$	$8+1+5$	$9+1+4$	$10+1+3$	$11+1+2$	$12+1+1$
$7+2+5$	$8+2+4$	$9+2+3$	$10+2+2$	$11+2+1$	
$7+3+4$	$8+3+3$	$9+3+2$	$10+3+1$		
$7+4+3$	$8+4+2$	$9+4+1$			
$7+5+2$	$8+5+1$				
$7+6+1$					

Записали смо свих (?) 78 начина на које се број 14 може написати као збир три природна броја. При томе сматрамо различитим збирове у којима се јављају исти сабирци, али у различитом поретку, па су представљања $1+8+5$, $5+1+8$, $8+5+1$, $1+5+8$, $8+1+5$, $5+8+1$ различита. Тврдимо да ниједно нисмо пропустили, и да су то сва таква разлагања; докажимо то. Број 14 можемо написати као збир четрнаест јединица, дакле

$$1+1+1\underset{\mathrm{I}}{+\!\!\!\!|}\;1+1+1+1+1+1\underset{\mathrm{II}}{+\!\!\!\!|}\;1+1+1+1+1+1.$$

Помоћу две „усправне“ цртице (I и II) формирајмо три „подзбира“ (у нашем примеру 3, 5 и 6) и изразимо број 14 као њихов збир, $14=3{+}5{+}6$. Свакој могућности постављања двеју усправних цртица одговара тачно једно од „разбијања“ броја 14 на три сабирка. Цртицу I можемо поставити на место било којег до 13 знакова $+$, па за то имамо 13 могућности. За сваку од тих могућности, цртицу II можемо поставити на било које од 12 преосталих места знакова $+$, па за то имамо 12 могућности. Добијамо $13\cdot 12$ могућности постављања ових двеју цртица. Међутим, тиме су сваком од разлагања додељене две могућности, будући да оно не разликује „нумерацију“ цртица, па повлачење цртице II на место цртице I а цртице I на место цртице II даје исто разлагања броја 14 на три сабирка. Стога је број свих разматраних разлагања једнак

$$\frac{13\cdot 12}{2}=78.$$

(Уочавамо да је у питању број комбинација друге класе од 13 елемената.) Заинтересовани читалац може уопштити овакво резоновање.

Ми знамо да не можемо за свако од 78 „разбијања“ конструисати троугао. Морамо узети у обзир да у задатим условима (мерни бројеви дужина страница су природни бројеви) дужина најдуже странице мора бити мања од 7 cm. Уз то знамо да је збир дужина било које две странице троугла већи од дужине треће странице. На основу тога уочавамо тачно 15 „разбијања“ и њима одговарајућих 15 уређених тројки природних бројева (a,b,c) које ће одређивати троугао ABC, а чије су дужине страница $a\,$cm, $b\,$cm и $c\,$cm. То су (поделили смо их на класе које дају подударне троуглове):

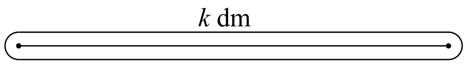
$(2,6,6)$	$(3,5,6)$	$(4,4,6)$	$(4,5,5)$
$(6,2,6)$	$(3,6,5)$	$(4,6,4)$	$(5,4,5)$
$(6,6,2)$	$(5,3,6)$	$(6,4,4)$	$(5,5,4)$
	$(5,6,3)$		
	$(6,3,5)$		
	$(6,5,3)$		

Имамо три класе једнакокраких троуглова (они су подударни и једнако оријентисани јер се странице добијају цикличним пермутовањем) и једну класу троуглова чије никоје две странице нису једнаке дужине. У овој последњој класи уочавамо две подкласе: $(3,5,6)$, $(5,6,3)$, $(6,3,5)$ односно $(3,6,5)$, $(5,3,6)$, $(6,5,3)$; сви су ови троуглови подударни али су и једнако оријентисани у оквирима сваке од подкласа а троуглови из различитих подкласа су различито оријентисани.

Сл. 2

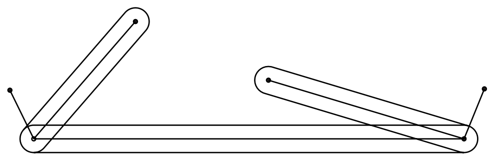
Вратимо се у одељење. Али, којег разреда? Покушаћемо да се „спустимо" до трећег или четвртог разреда основне школе.

„Мрдалице". Помоћу картонских трака можемо направити моделе дужи различитих дужина. Уместо центиметара определимо се за дециметре и потрудимо се да направимо довољан број „дужи", дужина од по 1 dm, 2 dm, … , 12 dm. На сл. 3 приказали смо такав модел који је „снабдевен" неопходним техничким детаљима.



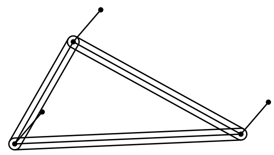
Сл. 3

Обезбедимо и известан број чиода, помоћу којих можемо „спајати" направљене моделе, сл. 4. Након краћег увежбавања ученици ће научити да вешто манипулишу оваквим „дужима", спајају их и мрдају, ако је то могуће. Ученици ће брзо уочити да (ознаке саме себе објашњавају а ученике њима не морамо оптерећивати):

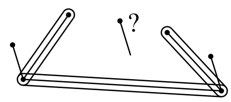


Сл. 4

- постоје тројке „дужи" од којих могу формирати „троугао", сл. 5. Такве су, на пример, тројке $(2,3,4)$, $(3,5,7)$, $(5,3,6)$, $(6,6,2)$, … ;

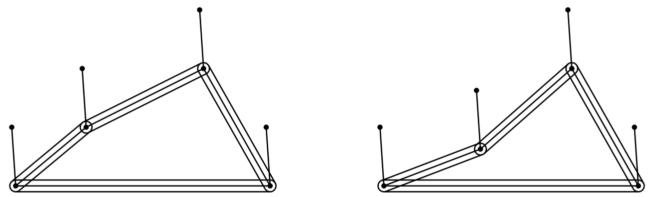


Сл. 5



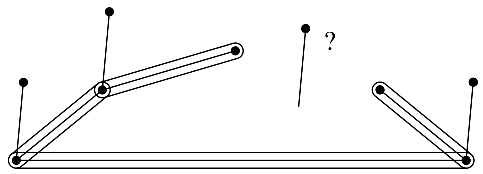
Сл. 6

- постоје тројке „дужи“ од којих не могу формирати „троугао“, сл. 6. Такве су, на пример, тројке $(1,2,5)$, $(2,8,4)$, $(2,3,9)$, $(3,3,7)$, ... ;
- постоје четворке „дужи“ од којих могу формирати „четвороугао“, сл. 7. Такве су, на пример, четворке $(2,3,5,3)$, $(6,1,4,3)$, $(1,2,3,4)$, ... ;



Сл. 7

- постоје четворке „дужи“ од којих не могу формирати „четвороугао“, сл. 8. Такве су, на пример, четворке $(1,3,2,8)$, $(5,1,9,2)$, $(6,1,2,3)$, ... ;



Сл. 8

- једном формирани „троугао“ је крута фигура и не може се деформисати померањем „темена“;
- формирани „четвороугао“ није крута фигура и може се деформисати померањем темена. У таквим случајевима може доћи до различитих ситуација, које морамо очекивати, сл. 7.

Према „открићима“. Уочавамо да се у оваквим експериментима визуелно опажање употпуњава опажањем додиром и тиме се доприноси дубљем разумевању и трајном усвајању уочених и додиром регистрованих чињеница. Већина ученика ће, уверени смо у то, овим путем без тешкоћа решити задатак 2. Очекујемо да ће се при томе обавезно појавити тројка $(3,5,6)$ (или нека њена пермутација) и бар једна од тројки $(2,6,6)$, $(4,4,6)$ или $(4,5,5)$ (или нека од њихових цикличних пермутација). Надамо се да ће се неки од ученика, посебно обдарених за математику, упустити у могућа уопштавања и у креираном контексту (допринос наставника) „*открити*“ нека важна правила и важне односе који се тичу посматраних (а и других) математичких објеката. Наведимо неке од очекиваних чињеница које ће „открити“:

1. Дужина било које странице троугла је мања од половине његовог обима.
2. У задатку 2 ниједна страница троугла није дужа од 6 cm.
3. Дужина сваке странице троугла је мања од збира дужина остале две странице тог троугла.

Напомена. Ово је познати став и део је наставног програма математике за шести разред. На описани начин ће већ неки ученици трећег разреда успети да га наслуте.

4. Дуж AB је најкраћи пут између тачака A и B.
5. Троугао је задат (одређен) (с тачношћу до положаја) ако су му задате дужине све три странице.
   Овде се може (интервенцијом наставника) доћи до нове формулације:
   Ако су странице једног троугла подударне одговарајућим страницама другог троугла, та су два троугла подударна. Троугао је крута фигура (раније наглашена чињеница).
6. Уверени смо да ће ученици, који на описани (или неки други) начин обогате свој ментални свет оваквим сазнањима, осетити задовољство, обрадовати се, можда осетити одушевљење, што додатно оправдава већ употребљену квалификацију да смо овде присуствовали „учењу откривањем“. А ми знамо да неједнакост троугла јесте један од „локалних међаша“ у планиметрији.

На исти начин, бавећи се (и помоћу „мрдалица“) многоугловима са више од 3 странице, ученици ће, уз помоћ наставника, извести закључке па тако доћи и до „открића“:

1. Дужина најдуже странице многоугла мора бити мања од збира дужина свих осталих страница.
2. Постоје неподударни n-углови, $n > 3$, чије су све одговарајуће странице подударне. Овде ће, сигурно, бити проблема са значењем речи *одговарајуће*, што захтева суочавање с појмом оријентације.
3. Многоугао са више од 3 странице није крута фигура, може се деформисати померањем темена.
4. Троугао је једина крута (недеформабилна) фигура.

Ово ће, посебно ученици трећег и четвртог разреда, сигурно доживети са емоцијама које нам показују да се и ово уклапа у наш појам „учења откривањем“. Наставник може на овоме месту указати и на практичан значај закључка 4. Због чињенице садржане у њему троугао је, у различитим варијантама, присутан у грађевинским и другим конструкцијама, да би се обезбедила њихова крутост (недеформабилност), што је, по правилу, њихово важно својство.

У наставној пракси могу се пронаћи и бројни други садржаји, подесни за обраду и усвајање на начин који ће такво учење, с правом, обогатити елементима „учења откривањем“ описаног типа. Чини нам се да је проблем правилних полиедара један од примера таквих садржаја, примерен нешто старијим ученицима, можда у VIII разреду основне школе.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Freudenthal, *Major Problems of Mathematics Education*, Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Birkhäuser 1983; Boston, Basel, Stuttgart, pp. 1–7.

2. J. Hiebert, T. Carpenter, *Learning and Teaching with Understanding*, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan Publishing Co., New York 1992, pp. 65–97.

3. R. Skemp, *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, London 1986.

4. L. Resnick, W. Food, *The Psychology of Mathematics Instructions*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Hillsdale, New Jersey 1981.

5. A. Woolfolk, *Educational Psychology*, Allyn and Bacon, Boston, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore 1995.

6. J. Bruner, *Toward a Theory of Instruction*, Norton, New York 1966.

7. Ј. Милинковић, *О вредновању математичких знања*, Настава математике XLIII, Друштво математичара Србије, Београд 1998, стр. 1–6.