Др Зоран Каделбург, Душан Ђукић, Миливоје Лукић, Иван Матић

НЕЈЕДНАКОСТИ КАРАМАТЕ, ШУРА И МЈУРХЕДА И НЕКЕ ЊИХОВЕ ПРИМЕНЕ

1. Увод

У овом чланку доказаћемо три класичне неједнакости општег типа. Оне се могу користити приликом доказивања многих других неједнакости, посебно оних које се последњих година задају на такмичењима, укључујући Међународне математичке олимпијаде. Неки од таквих задатака дати су као примери.

Почнимо подсећањем на неке појмове које ћемо у даљем користити.

За функцију $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ кажемо да је **конвексна** ако за сваке две тачке $x_1, x_2 \in (a,b)$ и за свака два ненегативна реална броја λ_1, λ_2 за које је $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Функција f је **конкавна** ако је функција $-f$ конвексна, тј. ако увек важи обрнута неједнакост

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Ако у претходним неједнакостима (при услову $x_1 \neq x_2$) једнакост важи само у случају кад је $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = 0$, за функцију f кажемо да је **строго конвексна** (одн. **строго конкавна**).

Лако се проверава да је функција $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ конвексна (строго конвексна) ако и само ако за произвољне тачке x_1, x_2, x из (a,b), такве да је $x_1 < x < x_2$, важи

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{1}$$

(односно, $\dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \dfrac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$). Аналогно тврђење важи за конкавне (строго конкавне) функције.

Нека је $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ и $x, y \in (a,b)$. **Подељена разлика** функције f у тачкама x, y је

$$\Delta_f(x,y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Према књизи [1]

Јасно је да је подељена разлика симетрична функција од x, y, тј. $\Delta_f(x,y) = \Delta_f(y,x)$.

Лема 1. *Функција $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ је конвексна (строго конвексна) ако и само ако је њена подељена разлика $\Delta_f(x,y)$ растућа (строго растућа) по обе своје променљиве. Аналогно тврђење важи за конкавне (строго конкавне) функције.*

Доказ. Нека је функција f конвексна и нека $x_1, x_2 \in (a,b)$ тако да је $x_1 < x_2$. Изаберимо произвољан број $x \in (a,b)$ за који је, на пример, $x_1 < x < x_2$ (за остале $x \in (a,b)$ доказ је сличан). Према претходној напомени, из конвексности функције f следи да важи неједнакост (1). Другачије записано,

$$\Delta_f(x_1,x) = \Delta_f(x,x_1) \leqslant \Delta_f(x_2,x), \tag{2}$$

што значи да је функција Δ_f растућа по свом првом аргументу. Због њене симетричности, она је растућа и по свом другом аргументу.

Обратно, ако је Δ_f растућа по обе своје променљиве, тада за $x_1 < x < x_2$ важи неједнакост (2), одакле следи (1), дакле и конвексност функције f на (a,b). ■

2. Релација мајорације за коначне низове и Караматина теорема

Уведимо најпре појам мајорације за коначне низове реалних бројева.

Дефиниција 1. Нека су $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ два (коначна) низа реалних бројева. Кажемо да низ a **мајорира** низ b и пишемо

$$a \succ b \qquad \text{или} \qquad b \prec a,$$

онда када, после евентуалне пренумерације, чланови низова a и b задовољавају следећа три услова:

1° $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$;

2° $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geqslant b_1 + b_2 + \cdots + b_k$, за свако k, $1 \leqslant k < n$;

3° $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

Први услов, јасно, није по себи никаква рестрикција, јер увек можемо преуредити низове. Есенцијалан је други услов. Јасно је да је $a \succ a$ за произвољан низ a.

Пример 1. (а) Ако је $a = (a_i)_{i=1}^n$ произвољан низ ненегативних бројева чији је збир једнак 1, онда је

$$(1, 0, \dots, 0) \succ (a_1, a_2, \dots, a_n) \succ \Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\Big).$$

(б) Низови $(4,4,1)$ и $(5,2,2)$ нису упоредиви у смислу релације $\succ$, тј. ниједан од њих не мајорира другог. △

Следећа корисна неједнакост се у литератури везује за више имена – помињу се Шур, Харди, Литлвуд, Поја, Вејл и Карамата[1]. Ми ћемо је, следећи чланке [2] и [3], звати **Караматином неједнакошћу**.

[1] I. Shur (1875–1941), немачки математичар, G. H. Hardy (1877–1947), енглески математичар, J. I. Littlewood (1885–1977), енглески математичар, G. Polya (1887–1985), мађарски математичар, H. Weyl (1885–1955), немачки математичар, J. Карамата (1902–1967), српски математичар

Теорема 1. *Нека су* $a = (a_i)_{i=1}^n$ *и* $b = (b_i)_{i=1}^n$ *(коначни) низови реалних бројева из неког интервала* (α, β). *Ако низ* a *мајорира низ* b, $a \succ b$, *и ако је* $f\colon (\alpha,\beta) \to \mathbf{R}$ *конвексна функција, тада важи неједнакост*

$$\sum_{i=1}^n f(a_i) \geqslant \sum_{i=1}^n f(b_i).$$

Доказ. Означимо са c_i подељену разлику функције f у тачкама a_i, b_i,

$$c_i = \Delta_f(a_i, b_i) = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}.$$

Како је функција f конвексна, из услова 1°, на основу леме 1 следи да је низ (c_i) опадајући.

Нека је, даље,

$$A_k = \sum_{i=1}^k a_i, \quad B_k = \sum_{i=1}^k b_i, \quad (k = 1, \ldots, n); \qquad A_0 = B_0 = 0.$$

Из претпоставке 3° следи да је $A_n = B_n$. Сада је

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(a_i) - \sum_{i=1}^n f(b_i) &= \sum_{i=1}^n (f(a_i) - f(b_i)) = \sum_{i=1}^n c_i(a_i - b_i)\\ &= \sum_{i=1}^n c_i(A_i - A_{i-1} - B_i + B_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c_i(A_i - B_i) - \sum_{i=1}^n c_i(A_{i-1} - B_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} c_i(A_i - B_i) - \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(A_i - B_i) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - c_{i+1})(A_i - B_i).\end{aligned}$$

Према претходном је $c_i \geqslant c_{i+1}$ а на основу претпоставке 2° је $A_i \geqslant B_i$ за $i = 1, 2, \ldots, n-1$, па је последњи збир, а тиме и разлика $\sum_{i=1}^n f(a_i) - \sum_{i=1}^n f(b_i)$ ненегативна, што је и требало доказати. ∎

Напомена. Јенсенова[2] неједнакост у облику

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\Big) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

за Јенсен-конвексну функцију f, добија се као специјалан случај Караматине неједнакости стављањем $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$. Општа Јенсенова неједнакост следи из тежинског облика Караматине неједнакости који овде не наводимо.

Пример 2. Доказати да за произвољне позитивне бројеве a, b и c важи неједнакост

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}.$$

[2] I. L. Jensen (1859–1925), дански математичар

Решење. Претпоставимо да су бројеви a, b и c такви да је $a \geqslant b \geqslant c$, тј. да је низ (a, b, c) опадајући (то није ограничавање општости разматрања јер у противном можемо да једноставно променимо ознаке). Тада важи $(2a, 2b, 2c) \succ (a+b, b+c, c+a)$, па примењујући Караматину теорему на функцију $f(x) = \dfrac{1}{x}$ која је конвексна на $(0, +\infty)$ добијамо неједнакост коју доказујемо. $\triangle$

Пример 3. Доказати да за бројеве x_1, x_2, ... , x_n из интервала $[-\pi/6, \pi/6]$ важи неједнакост

$$\cos(2x_1 - x_2) + \cos(2x_2 - x_3) + \cdots + \cos(2x_n - x_1) \leqslant \cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_n.$$

Решење. Бројеви $2x_i - x_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (подразумева се $x_{n+1} = x_1$), као и сами бројеви x_i, припадају интервалу $[-\pi/2, \pi/2]$. На том интервалу је функција $f(x) = \cos x$ конкавна, па Караматина неједнакост важи са обрнутим знаком. Зато је довољно доказати да низови $a = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, \ldots, 2x_n - x_1)$ и $b = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, када се уреде да буду опадајући, задовољавају претпоставке теореме 1. Нека су индекси m_1, ... , m_n и k_1, ... , k_n изабрани тако да

$$\{m_1, \ldots, m_n\} = \{k_1, \ldots, k_n\} = \{1, \ldots, n\},$$

$$2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geqslant 2x_{m_2} - x_{m_2+1} \geqslant \cdots \geqslant 2x_{m_n} - x_{m_n+1}, \tag{3}$$

$$x_{k_1} \geqslant x_{k_2} \geqslant \cdots \geqslant x_{k_n}. \tag{4}$$

Тада је

$$2x_{m_1} - x_{m_1+1} \geqslant 2x_{k_1} - x_{k_1+1} \geqslant x_{k_1}$$

(прва неједнакост важи јер је $2x_{m_1} - x_{m_1+1}$, по начину избора бројева m_i, највећи од бројева облика $2x_{m_i} - x_{m_i+1}$, а друга по начину избора бројева k_i), затим из сличних разлога

$$(2x_{m_1} - x_{m_1+1}) + (2x_{m_2} - x_{m_2+1}) \geqslant (2x_{k_1} - x_{k_1+1}) + (2x_{k_2} - x_{k_2+1}) \geqslant x_{k_1} + x_{k_2},$$

и, уопште, збир првих l чланова низа (3) није мањи од збира првих l чланова низа (4) за $l = 1, \ldots, n-1$. За $l = n$ се очигледно добија једнакост, па су сви услови за примену Караматине неједнакости испуњени. $\triangle$

3. Шурова и Мјурхедова неједнакост

Дефиниција 2. Нека је $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функција од n ненегативних реалних променљивих. Дефинишемо $\sum^! F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ као суму $n!$ сабирака добијених из функције $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ свим могућим пермутацијама низа $x = (x_i)_{i=1}^n$.

Специјално, ако је функција F облика

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$$

за неки низ ненегативних експонената $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, тада ћемо уместо $\sum^! F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ писати и $T[a_1, a_2, \ldots, a_n](x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или само $T[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ ако је из контекста јасно о ком низу x је реч.

Пример 4. $T[1,0,\dots,0]=(n-1)!\cdot(x_1+x_2+\cdots+x_n)$, а $T[\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}]=n!\cdot\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$. Неједнакост између аритметичке и геометријске средине, у новој терминологији, записује се овако

$$T[1,0,\dots,0]\geqslant T\left[\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}\right].$$

Докажимо сада **Шурову неједнакост**.

Теорема 2. *За* $a,b>0$ *важи* $T[a+2b,0,0]+T[a,b,b]\geqslant 2T[a+b,b,0]$.

Претходну неједнакост схватамо тако да важи

$$T[a+2b,0,0](x,y,z)+T[a,b,b](x,y,z)\geqslant 2T[a+b,b,0](x,y,z),$$

за сваки низ (x,y,z) позитивних бројева.

Доказ. Нека је (x,y,z) низ позитивних бројева за које доказујемо ову неједнакост. Применом елементарних трансформација, добија се

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}T[a+2b,0,0]+\frac{1}{2}T[a,b,b]-T[a+b,b,0]\\&\qquad=x^a(x^b-y^b)(x^b-z^b)+y^a(y^b-x^b)(y^b-z^b)+z^a(z^b-x^b)(z^b-y^b).\end{aligned}$$

Претпоставимо, не умањујући општост, да је $x\geqslant y\geqslant z$. Тада је у последњем изразу једино други сабирак негативан. Довољно је доказати да је

$$x^a(x^b-y^b)(x^b-z^b)+y^a(y^b-x^b)(y^b-z^b)\geqslant 0,$$

односно $(x^b-y^b)(x^a(x^b-z^b)-y^a(y^b-z^b))\geqslant 0$. Последња неједнакост је еквивалентна са $x^{a+b}-y^{a+b}-z^b(x^a-y^a)\geqslant 0$. Међутим,

$$x^{a+b}-y^{a+b}-z^b(x^a-y^a)\geqslant x^{a+b}-y^{a+b}-y^b(x^a-y^a)=x^a(x^b-y^b)\geqslant 0,$$

чиме је теорема доказана. ■

Последица 1. *Ако су* x, y *и* z *ненегативни реални бројеви и* $r\geqslant 0$, *тада важи неједнакост*

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geqslant 0.$$

Доказ. После ослобађања од заграда добија се неједнакост

$$T[r+2,0,0]+T[r,1,1]\geqslant 2T[r+1,1,0]$$

која је специјалан случај Шурове неједнакости за $a=r$, $b=1$. ■

Пример 5. Ако у Шуровој неједнакости уврстимо $a=b=1$ (односно у претходној последици $r=1$), добијамо

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2.\quad\triangle$$

За два произвољна низа a и b, $T[a]$ не мора бити упоредиво са $T[b]$, у смислу да је за произвољне вредности променљивог низа $x = (x_i)$ или увек $T[a](x) \leqslant T[b](x)$ или увек $T[a](x) \geqslant T[b](x)$. Испоставља се да је потребан и довољан услов за упоредивост ова два израза управо услов да један од низова a и b мајорира другог. Прецизније, то тврди следећа **Мјурхедова**[3] **теорема**.

Теорема 3. *Потребан и довољан услов да $T[a]$ буде упоредиво са $T[b]$, за све позитивне низове x, јесте да један од низова a и b мајорира другог у смислу релације $\prec$. Ако је $a \prec b$ тада је*

$$T[a] \leqslant T[b].$$

Једнакост важи ако и само ако су a и b идентични или када су сви x_i-ови једнаки међу собом.

Доказ. Докажимо прво неопходност услова. Стављањем да су сви чланови низа x једнаки c, добијамо да је

$$c^{\sum a_i} \leqslant c^{\sum b_i}.$$

Ово може бити испуњено за произвољно велике и произвољно мале c-ове једино ако је испуњен услов 3° из дефиниције 1. Сада ставимо да је $x_1 = \cdots = x_k = c$ и $x_{k+1} = \cdots = x_n = 1$. Упоређивањем највећих степена од c у изразима $T[a]$ и $T[b]$, и имајући у виду да и за произвољно велико c треба да важи $T[a] \leqslant T[b]$, изводимо неједнакост $a_1 + \cdots + a_k \leqslant b_1 + \cdots + b_k$, $1 \leqslant k < n$.

Докажимо сада довољност услова. Тврђење ће следити из наредне две леме. Претходно дефинишимо једну линеарну операцију L над низовима експонената b. Претпоставимо да су b_k и b_l два различита члана низа b, таква да је $b_k > b_l$. Можемо записати

$$b_k = \rho + \tau, \quad b_l = \rho - \tau \qquad (0 < \tau \leqslant \rho).$$

Ако је сада $0 \leqslant \sigma < \tau \leqslant \rho$, дефинишимо низ $a = L(b)$ на следећи начин

$$\begin{aligned} a_k &= \rho + \sigma = \frac{\tau + \sigma}{2\tau}\, b_k + \frac{\tau - \sigma}{2\tau}\, b_l, \\ a_l &= \rho - \sigma = \frac{\tau - \sigma}{2\tau}\, b_k + \frac{\tau + \sigma}{2\tau}\, b_l, \\ a_\nu &= b_\nu, \quad (\nu \neq k, \nu \neq l). \end{aligned}$$

Дефиниција овог пресликавања не захтева да неки од низова b и a буду у опадајућем поретку.

Лема 2. *Ако је $a = L(b)$, тада је $T[a] \leqslant T[b]$, при чему једнакост важи једино ако су сви чланови низа x међусобно једнаки.*

Доказ. Можемо преместити чланове низа тако да буде $k = 1$ и $l = 2$. Онда је

$$\begin{aligned} T[b] - T[a] &= \sum\nolimits^! x_3^{b_3} \cdots x_n^{b_n} (x_1^{\rho+\tau} x_2^{\rho-\tau} + x_1^{\rho-\tau} x_2^{\rho+\tau} - x_1^{\rho+\sigma} x_2^{\rho-\sigma} - x_1^{\rho-\sigma} x_2^{\rho+\sigma}) \\ &= \sum\nolimits^! (x_1 x_2)^{\rho-\tau} x_3^{b_3} \cdots x_n^{b_n} (x_1^{\tau+\sigma} - x_2^{\tau+\sigma})(x_1^{\tau-\sigma} - x_2^{\tau-\sigma}) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Једнакост важи само ако су сви x_i-ови једнаки. ∎

[3] R. F. Muirhead, енглески математичар

Лема 3. *Ако је $a \prec b$, али се a разликује од b, онда се a може добити из низа b узастопном применом коначног броја трансформација L.*

Доказ. Означимо са m број разлика $b_\nu - a_\nu$ које се разликују од нуле. m је природан број, и доказаћемо да можемо примењивати операцију L тако да после сваке њене примене број m опада (то значи да ће се процес завршити после коначно много корака). Како је $\sum(b_\nu - a_\nu) = 0$, а нису све разлике нула, тада постоје позитивне и негативне разлике, али је прва међу разликама позитивна. Можемо наћи такве k и l да важи

$$a_k < b_k, \quad a_{k+1} = b_{k+1}, \quad \dots, \quad a_{l-1} = b_{l-1}, \quad a_l > b_l$$

($b_l - a_l$ је прва негативна разлика, а $b_k - a_k$ је последња позитивна разлика која јој претходи). Нека је $b_k = \rho + \tau$ и $b_l = \rho - \tau$ и дефинишимо σ помоћу

$$\sigma = \max\{|a_k - \rho|, |a_l - \rho|\}.$$

Испуњена је бар једна од следеће две једнакости:

$$a_l - \rho = -\sigma, \qquad a_k - \rho = \sigma,$$

јер је $a_k > a_l$. Такође је $\sigma < \tau$, јер је $a_k < b_k$ и $a_l > b_l$. Нека је

$$c_k = \rho + \sigma, \qquad c_l = \rho - \sigma, \qquad c_\nu = b_\nu \quad (\nu \neq k, \nu \neq l).$$

Сада ћемо уместо низа b посматрати низ $c = (c_i)$. Број m се смањио бар за 1. Једноставно се доказује да је низ c опадајући и да мајорира низ a. Понављањем овог поступка, добиће се низ a, чиме је доказана и лема 3, а тиме и теорема у целини. ■

Пример 6. Неједнакост између аритметичке и геометријске средине је сада тривијална последица Мјурхедове неједнакости (видети пример 4). △

Пример 7. (Савезно такмичење 1991) Доказати да за позитивне бројеве a, b и c важи

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

Решење. Ако и леву и десну страну помножимо са

$$abc(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc),$$

добијамо да је полазна неједнакост еквивалентна неједнакости

$$\frac{3}{2}T[4,4,1] + 2T[5,2,2] + \frac{1}{2}T[7,1,1] + \frac{1}{2}T[3,3,3] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}T[3,3,3] + T[6,3,0] + \frac{3}{2}T[4,4,1] + \frac{1}{2}T[7,1,1] + T[5,2,2]$$

која је тачна јер из Мјурхедове теореме следи да је $T[5,2,2] \leqslant T[6,3,0]$. △

Пример 8. (Међународна математичка олимпијада 1995) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Решење. Изрази треба да буду хомогени да би могла да се примени Мјурхедова теорема. Поделимо десну страну са $(abc)^{4/3} = 1$ и помножимо и леву и десну страну са $a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a)(abc)^{4/3}$. Неједнакост постаје еквивалентна са

$$2T\left[\frac{16}{3}, \frac{13}{3}, \frac{7}{3}\right] + T\left[\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right] + T\left[\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}\right] \geqslant 3T[5,4,3] + T[4,4,4].$$

Последња неједнакост се добија сабирањем следеће три неједнакости које директно следе из Мјурхедове теореме:

$$\begin{aligned} 2T\left[\frac{16}{3}, \frac{13}{3}, \frac{7}{3}\right] &\geqslant 2T[5,4,3], \\ T\left[\frac{16}{3}, \frac{16}{3}, \frac{4}{3}\right] &\geqslant T[5,4,3], \\ T\left[\frac{13}{3}, \frac{13}{3}, \frac{10}{3}\right] &\geqslant T[4,4,4]. \end{aligned}$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$. $\triangle$

4. Задаци

1. („Мала олимпијада“ 1969) Дати су реални бројеви a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, такви да је

$$\begin{aligned} & a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0, \\ & b_1 \geqslant a_1, \\ & b_1 b_2 \geqslant a_1 a_2, \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & b_1 b_2 \cdots b_n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n. \end{aligned}$$

Доказати да је $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Упутство. Применити на функцију $f(x) = e^x$ следећу варијанту Караматине неједнакости.

Нека су $(a_i)_{i=1}^n$ и $(b_i)_{i=1}^n$ два низа реалних бројева за које важи:

1° $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$;

2° $\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} b_i$ *за све* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ако је $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **растућа** *конвексна функција, тада важи неједнакост*

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} f(b_i).$$

2. Доказати да за позитивне бројеве $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ важи неједнакост

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^3}{a_1}\geqslant a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.$$

Упутство. Слично као у примеру 3, примењујући Караматину теорему на конвексну функцију $f(x)=e^x$, показати да важи неједнакост

$$e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+\cdots+e^{3x_n-x_1}\geqslant e^{2x_1}+e^{2x_2}+\cdots+e^{2x_n}.$$

па заменити $x_i=\ln a_i,\ i=1,\dots,n$.

3. Доказати да за позитивне реалне бројеве a,b,c важи неједнакост

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\leqslant abc.$$

Упутство. Применити последицу Шурове неједнакости $T[3,0,0]+T[1,1,1]\geqslant 2T[2,1,0]$ или Караматину неједнакост на конкавну функцију $f(x)=\ln x$.

4. Ако су a, b и c позитивни реални бројеви, доказати да важи

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\geqslant 3\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.$$

Упутство. Комбиновати следеће четири последице Мјурхедове неједнакости:

$$\begin{array}{llll} 1. & T[9,2,0]\geqslant T[7,4,0], & 2. & T[10,1,0]\geqslant T[7,4,0],\\ 3. & T[6,5,0]\geqslant T[6,4,1], & 4. & T[6,3,2]\geqslant T[4,4,3],\end{array}$$

са последицом Шурове неједнакости $T[4,2,2]+T[8,0,0]\geqslant 2T[6,2,0]$ из које множењем са abc, добијамо

$$5.\quad T[5,3,3]+T[9,1,1]\geqslant T[7,3,1].$$

5. (Међународна математичка олимпијада 1984) Нека су x, y и z ненегативни реални бројеви за које важи једнакост $x+y+z=1$. Доказати неједнакост

$$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}.$$

Упутство. Десна неједнакост је еквивалентна са

$$12T[2,1,0]\leqslant 7T[3,0,0]+5T[1,1,1].$$

Ова неједнакост је тачна јер се добија сабирањем неједнакости $2T[2,1,0]\leqslant 2T[3,0,0]$ и $10T[2,1,0]\leqslant 5T[3,0,0]+5T[1,1,1]$ (прва неједнакост следи из Мјурхедове теореме, а друга је Шурова неједнакост за $a=b=1$).

6. (Међународна математичка олимпијада 1999) Нека је n фиксиран цео број, такав да је $n\geqslant 2$.

(а) Одредити најмању константу C тако да неједнакост

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C\biggl(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i\biggr)^4$$

важи за све реалне бројеве $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \geqslant 0$.

(б) За ту константу C одредити када важи једнакост.

Решење. С обзиром да је дата неједнакост хомогена, није ограничење општости ако претпоставимо да је $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. У том случају неједнакост се може преписати у облику

$$x_1^3(1-x_1) + x_2^3(1-x_2) + \cdots + x_n^3(1-x_n) \leqslant C.$$

Функција $f(x) = x^3(1-x)$ је конвексна на сегменту $[0,1/2]$. Нека је x_1 највећи од датих бројева. Тада бројеви $x_2,\ x_3,\ \dots,\ x_n$ нису већи од $1/2$. Ако је и $x_1 \in [0,1/2]$, онда из $(x_1, x_2, \dots, x_n) \prec (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots)$ на основу Караматине теореме следи

$$f(x_1) + f(x_2)\cdots + f(x_n) \leqslant f\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) + f\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr) + (n-2)f(0) = \frac{1}{8}.$$

Ако је, пак, $x_1 > 1/2$, онда је $1 - x_1 < 1/2$ и важи $(x_2, x_3, \dots, x_n) \prec (1-x_1, 0, \dots, 0)$. Поново на основу Караматине теореме је

$$f(x_1) + f(x_2)\cdots + f(x_n) \leqslant f(x_1) + f(1-x_1) + (n-2)f(0) = f(x_1) + f(1-x_1).$$

За функцију $g(x) = f(x) + f(1-x)$ се лако доказује да јој је највећа вредност на сегменту $[0,1]$ једнака $g(1/2) = 1/8$. Зато је и у овом случају $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqslant 1/8$. Једнакост важи, на пример, за $x_1 = x_2 = 1/2$, чиме је доказано да је $C = 1/8$.

7. (Међународна математичка олимпијада 2000) Нека су x, y, z позитивни реални бројеви, такви да је $xyz = 1$. Доказати да је

$$\Bigl(x - 1 + \frac{1}{y}\Bigr)\Bigl(y - 1 + \frac{1}{z}\Bigr)\Bigl(z - 1 + \frac{1}{x}\Bigr) \leqslant 1.$$

Решење. Из услова $xyz = 1$ следи да се бројеви x, y и z могу представити у облику $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{b}{c}$ и $z = \dfrac{c}{a}$ за неке $a, b, c > 0$. У новим ознакама неједнакост која се доказује своди се на задатак **3**.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. Каделбург, Д. Ђукић, М. Лукић, И. Матић: *Неједнакости*, Материјали за младе математичаре, св. 42, Друштво математичара Србије, Београд 2003.

2. Д. Номировский: *Неравенство Караматы*, Квант, вып. 4 (2003), 43–45.

3. А. И. Храбров: *Вокруг монгольского неравенства*, Математическое просвещение, сер. 3, вып. 7 (2003), 149–162.

4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities*, Cambridge University Press, 2nd ed., Cambridge 1951.