Др Владимир Јанковић

КВАДРАТНЕ ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

У средњим школама, обично у десетој години образовања, ученици се срећу са квадратним триномом. Том приликом се први пут упознају са проблемом одређивања екстремне вредности функције. Елементарним средствима се одређује да ли квадратна функција има минимум или максимум и у којој га тачки достиже. Циљ овог чланка је да се покаже како се идеја која се примењује на квадратне функције једне променљиве може проширити и применити на квадратне функције више променљивих. Идеја је демонстрирана на случају квадратне функције две променљиве, али се без већих проблема може примењивати и на квадратне функције већег броја променљивих. Добијено је и неколико тврђења помоћу којих се може непосредно, на основу вредности коефицијената, утврдити да ли квадратна функција две променљиве има минимум или максимум и где га достиже.

Садржај овог чланка аутор је унео у курс Математике 2 који има фонд часова $2+2$ током друге године студија. На тај начин је научио студенте да у потпуности решавају једну важну класу екстремалних проблема. Често се студенти „науче“ да такве проблеме решавају применом Фермаове теореме, која даје само неопходан услов екстремума, а у бољим случајевима и применом неопходних и довољних услова другог реда, којим се могу одређивати локални али не и глобални екстремуми. Ова лекција има значај и у томе што се у њој изводе неопходни и довољни услови за позитивну дефинитност и семидефинитност квадратних форми две променљиве. Ови услови се даље користе у неопходним и довољним условима другог реда. Свакако би било боље да се студенти упознају са неопходним и довољним условима за позитивну дефинитност и семидефинитност квадратних форми произвољног броја променљивих, али то захтева много ширу основу из линеарне алгебре, па се често изоставља због недостатка времена.

Квадратна функција две променљиве

Под квадратном функцијом две променљиве подразумевамо полином другог степена са две променљиве. Према томе, квадратна функција је функција која се може представити у облику

$$K(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f,$$

где су a, b, c, d, e и f коефицијенти такви да је међу a, b и c бар један различит од нуле. У овом чланку ћемо разматрати квадратне функције над пољем реалних бројева. Дакле, коефицијенти a, b, c, d, e и f су реални бројеви и променљиве x и y узимају вредности из скупа реалних бројева. Показаћемо како се могу одредити екстремне вредности овакве функције.

Функцији K придружујемо систем линеарних једначина

$$(S_K) \qquad \begin{cases} ax + cy + d = 0, \\ cx + by + e = 0. \end{cases}$$

Читалац који зна диференцијални рачун препознаће да су изрази који се налазе на левим странама једначина система (S_K) половине парцијалних извода функције K по x и y. Зато су решења система (S_K) стационарне тачке функције K, па се међу њима могу наћи све тачке у којима функција K достиже екстремне вредности. Ту чињеницу ћемо доказати елементарним средствима.

Ако је $a = b = 0$ и $c \neq 0$ онда квадратна функција K није ограничена ни одоздо ни одозго, па зато нема ни минимум ни максимум. Ако је $d \neq 0$, то следи из

$$K(x, 0) = 2dx + f,$$

а ако је $d = 0$, то следи из

$$K(x, 1) = 2cy + e + f.$$

Ако је $a > 0$, функција K није ограничена одозго. То следи из чињенице да функција

$$K(x, 0) = ax^2 + 2dx + f$$

није ограничена одозго. Исто то важи и у случају да је $b > 0$. На сличан начин може да се докаже да функција K није ограничена одоздо уколико је $a < 0$ или $b < 0$. Према томе, важи

Теорема 1. *Ако је квадратна функција K ограничена одоздо, онда су задовољене неједнакости $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, и при томе је бар једна од њих строга.*

Даље разматрамо случај када је $a > 0$. У том случају функција K није ограничена одозго. Преостаје нам да испитамо да ли је функција K ограничена одоздо и ако јесте да ли има минимум и у којим га тачкама достиже. Функцију aK можемо представити у следећем облику:

$$aK(x, y) = (ax + cy + d)^2 + [(ab - c^2)y^2 + 2(ae - cd)y + (af - d^2)].$$

Разматраћемо неколико случајева.

1. случај: $ab - c^2 < 0$. Функција

$$K(-(cy + d)/a, y) = [(ab - c^2)y^2 + 2(ae - cd)y + (af - d^2)]/a$$

није ограничена одоздо, па зато функција K нема минимум.

2. случај: $ab - c^2 = 0$, $ae - cd \neq 0$. Функција

$$K(-(cy + d)/a, y) = [2(ae - cd)y + (af - d^2)]/a$$

није ограничена одоздо, па зато и у овом случају функција K нема минимум.

3. случај: $ab - c^2 = 0$, $ae - cd = 0$. У овом случају су једначине система (S_K) пропорционалне, па се зато систем своди на једну од њих. Скуп решења система (S_K) је бесконачан и геометријски представља праву у равни. Како је

$$K(x, y) = [(ax + cy + d)^2 + (af - d^2)]/a,$$

следи да функција K има минимум $\hat{K} = (af - d^2)/a$ који достиже у тачкама које задовољавају једначину $ax + cy + d = 0$, тј. систем (S_K).

4. случај: $ab - c^2 > 0$. Имамо да је

$$(ax + cy + d)^2 \geqslant 0,$$

$$(ab - c^2)y^2 + 2(ae - cd)y + (af - d^2) \geqslant [(ab - c^2)(af - d^2) - (ae - cd)^2]/(ab - c)^2.$$

Следи да је $K(x, y) \geqslant \hat{K}$, где је

$$\hat{K} = [(ab - c^2)(af - d^2) - (ae - cd)^2]/a(ab - c)^2.$$

Једнакост $K(x, y) = \hat{K}$ је задовољена ако је $y = (cd - ae)/(ab - c^2)$ и $ax + cy + d = 0$. Није тешко видети да ове услове задовољава јединствена тачка $(\hat{x}, \hat{y})$, која је решење система (S_K).

Сличне анализе функције K можемо спровести и под претпоставкама да је $a < 0$, $b > 0$ и $b < 0$. Тиме добијамо поступак за одређивање екстремних вредности квадратне функције K, а такође и поступак за доказивање општих тврђења која говоре о томе када функција K има екстремну вредност, колика је она и где се достиже. За случај минимума важи

Теорема 2. *Ако је $a > 0$ или $b > 0$, квадратна функција K има минимум ако и само ако је задовољен један од следећа два услова:*

1. $ab - c^2 = 0$, $a : c : d = c : b : e$,

2. $ab - c^2 > 0$.

Минимум се достиже у тачкама које задовољавају систем једначина (S_K). У првом случају једначине овог система су пропорционалне, па систем (S_K) има бесконачно много решења. У другом случају систем (S_K) има јединствено решење.

Могу се формулисати теореме сличне теоремама 1 и 2 које се односе на максимум квадратне функције K. Препуштамо читаоцу да то сам уради.

Квадратна форма две променљиве

Под квадратном формом две променљиве подразумевамо хомогену квадратну функцију, тј. функцију H која се може представити у облику

$$H(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy,$$

где су коефицијенти a, b и c реални бројеви међу којима је бар један различит од 0. Систем једначина придружен квадратној форми H има облик

$$(S_H) \qquad \begin{cases} ax + cy = 0, \\ cx + by = 0. \end{cases}$$

Једно решење овог система је тривијално, тачка $(0,0)$. Како је $H(0,0) = 0$, на основу разматрања из претходног параграфа закључујемо да ако је квадратна форма H ограничена одоздо, онда она има минималну вредност $\hat{H} = 0$, па је зато $H(x,y) \geqslant 0$ за свако $x, y \in R$. У том случају кажемо да је квадратна форма H позитивно семидефинитна. Ако је квадратна форма H позитивно семидефинитна и ако је $H(x,y) = 0$ само за $(x,y) = (0,0)$, за њу кажемо да је позитивно дефинитна. Из Теореме 2 није тешко добити критеријуме за позитивну семидефинитност и позитивну дефинитност. Ево како они изгледају:

Теорема 3. *Квадратна форма H је позитивно семидефинитна ако и само ако је $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $ab - c^2 \geqslant 0$. Скуп тачака у којима се она анулира поклапа се са скупом решења система једначина (S_H).*

Теорема 4. *Квадратна форма H је позитивно дефинитна ако и само ако је $a > 0$ и $ab - c^2 > 0$.*

Последња теорема је посебан случај Силвестеровог критеријума за позитивну дефинитност квадратних форми на коначнодимензионим векторским просторима.