**Др Милосав Марјановић, мр Маријана Зељић**

# КРОЗ ГЕОМЕТРИЈУ ДО РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Први аутор је ову тему излагао у виду једночасовног предавања одржаног на Републичком семинару о настави математике 2006, Београд, 15. јануар 2006. године. Овај чланак је допуњени и проширени садржај тог предавања

## Први кораци ка облику и броју

Шта је предмет математике, питање је на које постоји велики број одговора који пројектују врло различите углове сагледавања. Али и данас, лако се можемо определити за древно Питагорејско гледиште, по коме су „вечни облик и број" оно што најсажетије и најверније исказује предмет ове науке. Питагорејци су сагледавали математику као модел по коме је склопљен универзум, а један од најзначајнијих међу њима, Филолаус (V век пре Христа) каже:

> „Да није бројева, ништа од оног што постоји не би никоме било јасно, нити само по себи нити у односу на друге ствари што постоје."

И данас ова њихова гледишта можемо узети као најпотпунија - корени математике налазе се у реалном свету који нас окружује, а њена основна сврха је у успостављању интелигибних односа у сагледавању тог света.

Да су облик и број човекови примарни појмови сведочи нам дуга археолошка прошлост. Наука о човеку потврђује да је још усправни човек (Homo erectus), можда много пре него неких 300 000 година, крешући камен и обликујући га, успео да трансформише снопове варница које су се исијавале, у стално пламтећу ватру. Тако су његова огњишта обједињавала заједнице, интензивирала духовни и емоционални живот и стимулисала вербалну комуникацију. Варијације обрађиваних камених предмета сведоче да је то примитивно људско биће поседовало духовну моћ стварања представа о разноврсним облицима. А у налазиштима из касније археолошке прошлости, поред оруђа и предмета обликованих за култне сврхе, постоје и други видови изражавања облика - пећинско сликарство, украси на керамици итд.

Граматички облик који постоји у више савремених језика, па и у нашем, а који се назива двојина, доказ је да се у људским заједницама из неког давног времена био формирао „мали" бројевни систем који се састојао од „један", „два", и „више". У словенским језицима при пребројавању до пет падеж именице има један облик, а од пет па даље други. Овај феномен доказује да су неки наши далеки преци имали бројевни систем који је ишао само до пет. На крају цитирајмо овде и И. Р. Шафаревича [4], који каже:

> „Природни бројеви су се појавили као резултат пребројавања. Спознаја чињенице да два ока, два човека који се крећу један поред другог, два весла уз неки чамац имају нешто заједничко, а што изражава апстрактни појам „два“, био је значајни корак у когнитивном развоју људске врсте.“

Разлика у генези идеја о природном и реалном броју условљава ову нашу уводну причу о облику и броју. Наиме, кад мислимо на број, мислимо да се та реч у основи односи на природне бројеве и њихове размере (тј. на оне конструкције које се у грађењу бројевних система завршавају са скупом $\mathbf{Q}$ рационалних бројева), док се идеја реалног броја мора да везује за својство непрекидности које носи наше представе о идеализованим (тј. апстрактно схваћеним) геометријским објектима (тј. њиховим облицима). Слободније речено, идеја природног броја везана је за дискретне реалности, а реалног за наше представе о непрекидном простирању објеката опажајног света. У одељку који непосредно следи, изразићемо прецизније ова два основна когнитивна корака.

### Како настају појмови броја и облика

Често кажемо да појмови настају путем апстраховања. Латински глагол “abstraho” преводимо са „издвојити“, „отргнути“, а апстракцију схватамо као процес издвајања из класа посебних примера, битних, карактеристичних својстава за неки појам. Кад су полазни (основни) математички појмови у питању, лакше нам је говорити о својствима која нису битна за неки појам (а колективни термин за та својства је „шум“) и која у процесу грађења појма потискујемо и занемарујемо, тако да оно што преостаје представљаће чисти појам, који ће најбоље себе одређивати самим својим постојањем. Значај овог реалнијег вида апстраховања имаћемо у виду кад сагледавамо осмишљавање математичких појмова у настави и кад се, у почетној фази, многи од њих баш и осмишљавају као полазни.

Ако је наше кратко излагање у претходном одељку било један филогенетски осврт на развој идеје о броју и облику, сад ћемо се концентрисати на онтогенетски развој тих идеја.

Сваком нашем конкретном поимању броја, прво претходи представа о скупу објеката које опажамо. Како од те представе долазимо до идеје броја исказујемо у виду следећег принципа.

Канторов когнитивни принцип. *Нека је $A$ неки скуп који опажамо. Тада,*

*а) занемарујући природу елемената тог скупа,*

*б) занемарујући начин организовања елемената тог скупа,*

*долазимо до чисте идеје броја.*

Кад је скуп означен словом $A$, тада је Кантор означавао са $\bar{\bar{A}}$ број његових елемената, где једна црта означава једну, а друга другу од горе поменутих апстракција (занемаривања). Под занемаривањем природе елемената подразумева се свођење сваког од њих на јединицу пребројавања. (На пример, предмети које бројимо могу бити различити, али укупно их је, рецимо, 10.) Изворно, Кантор је говорио о занемаривању начина како су елементи скупа $A$ уређени. Изражавајући ту његову мисао савременим математичким језиком, рекли бисмо да у том другом кораку занемарујемо структуру на скупу $A$. У такве структуре може да спада нека уређајна релација на скупу $A$, начин како су његови елементи груписани, односно то је занемаривање било каквих релацијских односа међу елементима тог скупа.

Начин груписања елемената јесте небитно својство за појам броја али то својство игра значајну улогу код састављања записа којима те бројеве означавамо. Узмимо да то конкретније разјаснимо на једном примеру. У свакој од $k$ кутија налази се по $m$ плавих и $n$ црвених куглица.

$$\underbrace{\boxed{m \,|\, n}\quad \boxed{m \,|\, n}\quad \dots\quad \boxed{m \,|\, n}}_{k}$$

У свакој кутији је по $m+n$ куглица, а у $k$ кутија, укупно: $k\cdot(m+n)$ куглица. Плавих куглица има $k\cdot m$, а црвених $k\cdot n$. Укупно, то је $k\cdot m+k\cdot n$ куглица. Број куглица не зависи од начина како их (у мислима) групишемо, па два различита записа означавају један те исти број. Једначећи те записе, добијамо:

$$k\cdot(m+n)=k\cdot m+k\cdot n.$$

Наведени пример показује значај Канторовог принципа у разради аритметике који, разуме се, схватамо као когнитивни (а не математички) принцип. Тако тај принцип не сматрамо делом математичких садржаја, већ га укључујемо у дидактичке садржаје који наставнику уносе јасноћу у поступке које примењује у извођењу наставе.

У својој широко познатој филозофској расправи [2], А. Поенкаре разматра генезу геометријских појмова и налази да они настају као резултат мисаоног односа човека, везано за опажање објеката непромењивог облика (чврстих тела) који постоје у реалном свету око нас. Цитирајмо следећу његову реченицу:

> „Па дакле, кад не би било чврстих тела у природи, не би било ни геометрије.“

Сажимајући та његова разматрања, можемо их формулисати у виду принципа:

Поенкареов когнитивни принцип. *Опажајући у реалном свету чврсто тело $A$ и занемарујући сва његова физичка својства, долазимо до чисте представе геометријског објекта.*

На тај начин формирану геометријску представу означавамо са $\overline{A}$, где дебела црта изнад слова $A$ сугерише апстраховање (занемаривање) свих физичких својстава реалног објекта $A$. Дакле, геометријски конципирајући објекат $A$, занемарујемо сва његова својства сем облика и величине. Ова два последња термина узимамо са њиховим спонтаним значењем и ниједан од њих нема једнозначно математичко одређење. Из низа примера знамо за вишеструко значење појма облика, па рецимо, једном кажемо да су два троугла различитог облика (кад немају све углове једнаке), а други пут да су истог троугаоног облика. А да не говоримо о значењу тог појма кад кажемо да нешто има облик чизме или испруженог прста. Спонтани појам величине се такође разлаже на низ посебних мера као што су дужина, ширина, висина, дијаметар, површина, запремина итд.

У следећем кораку издвојићемо један фундаментални геометријски облик и анализирати генеративни процес који води његовом формирању.

### Дуж - фундаментални геометријски облик

Посматрајући неки објекат ми неизоставно формирамо и осећај о његовом простирању. У неким случајевима таквог посматрања, ми у мислима издвајамо два краја тог објекта и концентришемо се на његово простирање између тих крајева. То су случајеви кад гледамо тела као што су затегнуте жице или конопци, штапови али и сложенији случајеви кад, на пример, процењујемо дужину неке зграде или висину неког дрвета. Заједничко у свим случајевима таквог посматрања јесте издвајање крајева објекта и процена (или мерење) износа његовог простирања између тих крајева; кад све што је у таквим ситуацијама небитно, па то занемаримо, и битно, па то истакнемо, долазимо до идеје о крајевима као двема тачкама и простирању између тих крајева као правој линији која их спаја. Тим путем се ствара у нашем уму идеја о једном чистом геометријском облику који називамо дуж. Отуда је свако интелигибно опажање простирања објеката између њихових крајева асоцирано са идејом дужи која се јавља у нашем уму или се материјализује као штап или трака коју користимо за мерење у свакодневном животу.

Напоменимо још да се ова наша темељна просторна представа преноси и на активност поређења других величина (магнитуда) кад износе преносимо на неку скалу (рецимо, тежину на полугу кантара, температуру на термометарску скалу и сл.).

Овде смо третирали један од многих других математичких појмова и видели како нам служи да се на интелигентан начин односимо према свету у коме живимо. Овај аспект не видимо кад математику сводимо само на вештину рачунања и формално оперисање са апстрактним математичким појмовима. И на крају, цитирајмо поново Поенкареа [3]:

> „Главни циљ математичког образовања је развијање одређених способности човекова ума.“

А поука је за нас који изводимо наставу, да се те способности не могу развити ако се оно што се учи, не учи са потпуним разумевањем.

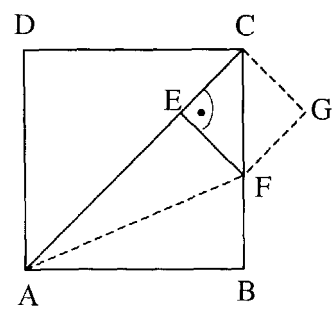
### Откривање првог ирационалног броја

Одувек, а то значи и данас, свако мерење у оквирима материјалног света завршава се са одређеном тачношћу и изражава децималним разломком са извесним бројем децимала. Бирањем још мањих јединица мере, такво нумеричко изражавање може се свести на изражавање целим бројевима. Искуство ове врсте потврђује претпоставку да се свака величина може мерити довољно малом јединицом мере и изразити путем целог броја.

Питагора је био први у схватању геометријских објеката апстрактно, тј. одвајао је њихово значење од оног које су имали у практичном искуству из кога су потекли. Али је из тог искуства пренео претпоставку о мерењу величина, узимајући да за две дужи постоји трећа, њихова заједничка мера, путем које се дужине тих дужи изражавају целобројно. За такве две дужи кажемо да су самерљиве, па Питагора је, дакле, претпостављао да су сваке две дужи самерљиве.

Легенда каже да су се Питагорејци налазили на мору, кад је један од њих, Хипасус из Метапонта (V век пре Христа) изнео доказ о несамерљивости стране и дијагонале квадрата. Данас ми гледамо на овај доказ као први у историји математике, кад је откривена егзистенција једног ирационалног броја. За Питагорејце, то откриће је значило нарушавање филозофског система њиховог великог учитеља Питагоре (који је највероватније био убијен у неком социјалном бунту, још крајем VI века пре Христа). Да би сачували ово откриће у тајности, легенда такође каже да су поменути Питагорејци бацили несрећног Хипасуса са палубе тог брода у море.

Не зна се тачно како је Хипасусов доказ изгледао, али је сигурно да је морао бити у геометријском облику. Овде ћемо изложити један такав доказ, уз препоруку да га наставници пренесу својим ученицима (пре свега оним који су заинтересовани за математику). Ми ћемо, наравно, користити савремене ознаке којих у то време није било, али са којима су ученици VII или VIII разреда основне школе данас добро упознати.




Претпоставићемо да постоји дуж, чија је дужина $\mu$, а која је заједничка мера за страницу квадрата, дужине $a$, и за његову дијагоналу, дужине $d$. Тада постоје природни бројеви $m$ и $n$, такви да је

$$a = m \cdot \mu \quad \text{и} \quad d = n \cdot \mu.$$

Пратимо даљи ток доказа уз приложену слику.

Пренесимо страницу $AB$ на дијагоналу $AC$, од тачке $A$ до тачке $E$. Конструишимо дуж $EF$ нормално на дуж $AC$. Троугао $FEC$ је једнакокрак, па је $|EC| = |EF|$. Троуглови $ABF$ и $AEF$ су подударни, па је $|EF| = |BF|$. Имаћемо

$$\begin{aligned} a_1 &= |EC| = n \cdot \mu - m \cdot \mu = (n - m) \cdot \mu = m_1 \cdot \mu, \\ d_1 &= |FC| = m \cdot \mu - (n - m) \cdot \mu = (2m - n) \cdot \mu = n_1 \cdot \mu. \end{aligned}$$

Пошто је $d_1 = |FC| < |BC| < |AC| = d$ и $a_1 = |EC| = |BF| < |BC| = a$, биће

$$m > m_1 \quad \text{и} \quad n > n_1.$$

Поновимо ли овакав исти поступак поређења странице и дијагонале квадрата

$ECGF$, добићемо бројеве $m_2$ и $n_2$ и биће $m > m_1 > m_2$ и $n > n_1 > n_2$, а нови, још мањи квадрат ће преостајати.

Пошто се овај поступак поређења никад не завршава, имаћемо два бесконачна низа

$$m > m_1 > m_2 > \cdots \qquad \text{и} \qquad n > n_1 > n_2 > \cdots$$

бројева све мањих од $m$ (а таквих може највише бити $m-1$) и бројева све мањих од $n$ (а таквих може највише бити $n-1$).

Ова контрадикција доказује да су страница и дијагонала квадрата две дужи које нису самерљиве.

Приметимо да у овом доказу нисмо користили Питагорину теорему, а што није случај кад пишемо $d^2 = 2a^2$ и кад после смена $d = n \cdot \mu$ и $a = m \cdot \mu$, доказујемо да једначина $n^2 = 2m^2$ нема решења у скупу природних бројева.

## Еудоксова теорија размера

Сви правоугли троуглови на које се квадрати деле слични су, па је однос дијагонале и странице квадрата једна константа. Тако можемо претпоставити да је Питагорејце интересовало питање колико је пута дијагонала квадрата већа од његове странице, очекујући да то изразе размером $n : m$ два цела броја. Несамерљивост ових величина значила је неадекватност бројевног система који је тада био развијен (тј. система позитивних рационалних бројева).

Излаз из ове кризе била је Еудоксова теорија размера (Еудокс, 408-355. год, један од три највећа математичара из класичног периода грчке математике). Ову теорију налазимо изложену у Еуклидовим „Елементима“, у реторичком, а не симболичком виду. Компликована је колико је у то време морала бити, али је заиста можемо узети као потпуно логички засновану теорију (позитивних) реалних бројева изложену у терминима класичне геометрије.

Код Еудокса носилац значења реалног броја је размера две магнитуде (дужине, површине, запремине). Бројеви, кад се јављају у том контексту, функционишу као спољни оператори (запремина пирамиде је трећина запремине одговарајуће призме, удвостручавање коцке итд). (Прецизније речено, кад пишемо $\frac{1}{3}V$ или $2a$, то не схватамо као множење, него као дејство скупа $Q_+$ на неки скуп магнитуда.)

Било би заиста мучно наводити и на савремени симболички језик преводити основне садржаје Еудоксове теорије размера. Користићемо савремене ознаке: по Виету (1540-1603) слова као ознаке за магнитуде, Отредов (G. Oughtred, 1574-1660) симбол $a : b$ за размеру, Рекордов (R. Record, 1510-1558) знак једнакости, Хариотове (T. Harriot, 1560-1621) за „мање“ и „више“, итд. Тим ознакама изложићемо основне идеје теорије размера и оно што је та теорија спутавала, а касније је био даљи развој математике.

Код Еудокса реални број је означаван односом две истородне магнитуде, па тако за исти број, постојало је бесконачно много различитих ознака (или како бисмо ми то данас рекли, читава једна бесконачна класа еквиваленције таквих ознака). Једнакост међу таквим ознакама $a : b$ и $c : d$ одређивао је услов: за свака два цела броја (мисли се природна, јер тада негативних није било) $m$ и $n$,

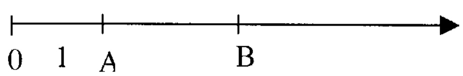
$$\left.\begin{array}{l} ma > nb \\ ma < nb \\ ma = nb \end{array}\right\} \quad \text{кадгод је} \quad \left\{\begin{array}{l} mc > nd \\ mc < nd \\ mc = nd \end{array}\right.$$

Рачунске операције које су извођене на записима целих бројева, нису извођене директно на размерама, већ се манипулисало са магнитудама. Сабирале су се, или боље рећи, скупљале, само истородне магнитуде, изрази какве налазимо у Виетовој словној алгебри: „$A$ in $B$“ ($A$ по $B$) сугерише површинску меру коју представља правоугаоник са страницама $A$ и $B$, „$A$ in $B$ plano“ сугерише запреминску меру коју представља ваљак висине $A$ конструисан над равнинским $B$, итд. У „Елементима“ и преведене на савремени језик, можемо наћи теореме које кажу: два правоугаоника са страницама $a$, $b$ и $c$, $d$ имају једнаке површине ако и само ако је (директна) размера $a : c$ једнака (инверзној) $d : b$. Осећајући разлику, ренесансни математичар Тартаља (Nicolo Fontana, 1500-1557) залагао се за терминолошко разликовање - кад се бројеви множе да се користи термин “multiplicare”, а кореспондентна манипулација са магнитудама назначавала би се са “ducere” (извођење).

Еудоксова теорија дала је значење реалном броју као дужинској мери, али је спутала сваки даљи развој симболичке математике.

## Сјај Декартовог открића

Кад кажемо да је Декарт (René Decartes, 1596-1650) открио анлаитичку геометрију, можемо помислити да је он увођењем координата, спојио геометрију са постојећом алгебром. Оно што је код Декарта било посебно битно је фиксирање на полуправој са почетком $O$, јединичне дужи према којој ће се однос сваке друге дужи изражавати.




Да будемо прецизнији, међу свим једнаким размерама $a : b$, узима се она облика $a' : 1$ која ће ту класу ознака представљати на јединствен начин.

Тако сваки реални број представља јединствена дуж $a'$, која се преноси на полуправу са својим почетком у тачки $O$. На горњој слици дуж $OB$ је узета да представља ту дуж $a'$. Тако се добија један геометријски модел којим представљамо реалне бројеве дужима (а у каснијем развоју и тачкама, будући да су дужи $OB$ и тачке $B$ на Декартовој „оси“ у 1–1 коресподенцији).

Дуж $a'$ у једнакости $a : b = a' : 1$ лако се конструише користећи се сличним троугловима, тј. њу можемо сматрати као резултат дељења дужи $a$ са дужи $b$. Слично, користећи сличност, Декарт је конструисао и дужи које би представљале производе $a \cdot b$ (а то је била дуж $x$ у пропорцији $1 : a = b : x$). Те геометријске конструкције схваћене као операције, имале су за резултат опет дуж, која се могла преносити на осу. Ово је врло значајни аспект Декартова модела, да је он затворен у односу на операције множења и дељења. То је и учинило његов начин спајања геометрије и алгебре (тј. идеја о бројевима) успешним, а што није у потпуности могао бити случај са таквим покушајима које налазимо код Виета и његовог ученика Марина Геталдића.

Декарт је радио са полуосом, односно са „четвртином" равни, јер је одбијао идеје о негативним бројевима (који су се јављали као резултат решавања једначина, али који су тек дуго после стекли своју легитимност у математици). Изложићемо у савременијем оквиру ове Декартове идеје, надајући се да ће оне добити више места у настави математике.

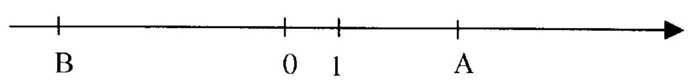
### Декартов модел у савременом виду

Многе математичке објекте узимамо као оријентисане, опредељујући се за једну од две могуће оријентације. Интуитивно се ослањајући на два могућа смера кретања по правој, узимамо је као оријентисану и називамо оса. Слично, разликујући дуж $AB$ од дужи $BA$, говоримо о оријентисаним дужима и њиховим почетним и крајњим тачкама. Тада подударност оријентисаних дужи значи могућност њиховог поклапања путем транслаторног преноса - поклапањем почетка са почетком и краја са крајем.

Ако позитивне реалне бројеве можемо интерпретирати као односе једне дужи према другој која је одабрана за јединицу мере, интерпретација свих реалних бројева су односи оријентисаних дужи према оријентисаној јединичној дужи.

Ову сложенију причу о оријентацији можемо избећи користећи осу са издвојеном тачком $O$ и фиксираном јединичном дужи и коришћењем двеју управних оса те врсте, које чине координатни систем у равни. Коришћење осе и координатног система је једино осавремење у нашем излагању Декартовог геометријског модела за скуп реалних бројева.

Слова $a$, $b$, ... биће променљиве којима ћемо означавати реалне бројеве. Кад је $a > 0$ и $b < 0$, дужи $OA$ и $OB$ биће геометријски репрезенти за $a$ и $b$.

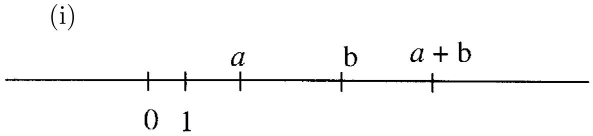



Кад те дужи престајемо да сматрамо као оријентисане, њихове дужине (растојање између њихових крајњих тачака мерена јединичном дужи) су позитивни бројеви $|a|$ и $|b|$, које зовемо апсолутним вредностима бројева $a$ и $b$.

За две дужи $OA$ и $OB$, померањем дуж осе дужи $OB$ у положај где се почетна тачка дужи $OB$ поклапа са крајњом тачком дужи $OA$, добија се дуж $OB'$ за коју кажемо да настаје надовезивањем дужи $OA$ и $OB$. Надовезивање је геометријска конструкција која даје смисао сабирању реалних бројева.

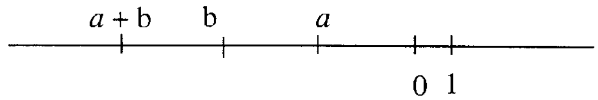
На следећим сликама интерпретирана су четири случаја таквог сабирања.

(i)



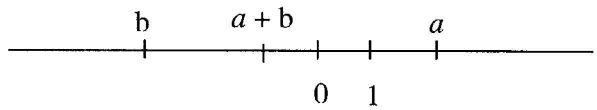

$a > 0$ и $b > 0$

(ii)



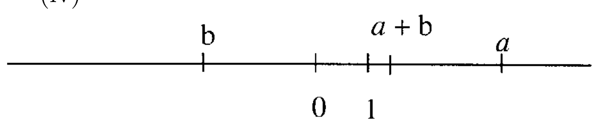

$a < 0$ и $b < 0$

(iii)




$a > 0$, $b < 0$ и $|a| < |b|$

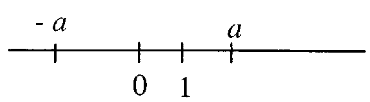
(iv)

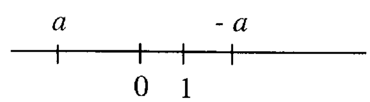



$a > 0$, $b < 0$ и $|a| > |b|$

У случајевима (i) и (ii): $|a + b| = |a| + |b|$, а у случајевима (iii) и (iv): $|a + b| < |a| + |b|$, (па је увек $|a + b| \leqslant |a| + |b|$).

За број $a$, $-a$ је његов супротни, што интерпретирају следеће слике:




У размери $a : b = c : d$, парове $a, c$ и $b, d$ зваћемо аналогним (тј. када се ови количници пишу као разломци, аналогни су бројилац са бројиоцем и именилац са имениоцем).

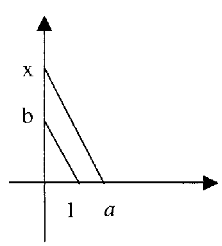
Производ $a \cdot b$ интерпретираћемо геометријски као дуж која настаје конструкцијом сличних троуглова. Кад имамо пропорцију

$$1 : a = b : x,$$

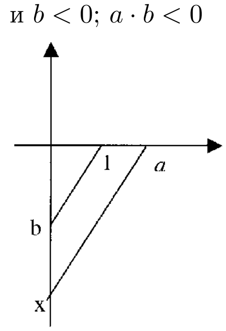
према поменутој Еуклидовој теореми, правоугаоник са страницама 1, $x$ има исту површину као и правоугаоник чије су странице $a$, $b$ (тј. биће $1 \cdot x = a \cdot b$, односно, $x = a \cdot b$). Дуж $x$ конструишемо, повлачећи прво дуж чији су крајеви познати, аналогни чланови у овој пропорцији, па затим конструишући паралелну дуж са крајевима у тачкама $a$ и $x$.

Наведимо следећа четири типична случаја:

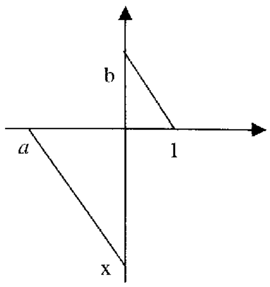
(i) $a > 0$ и $b > 0$; $a \cdot b > 0$



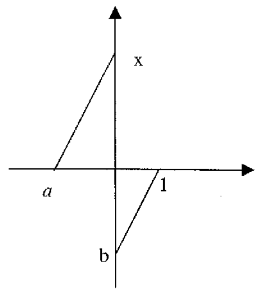

(ii) $a > 0$ и $b < 0$; $a \cdot b < 0$



(iii) $a < 0$ и $b > 0$; $a \cdot b < 0$



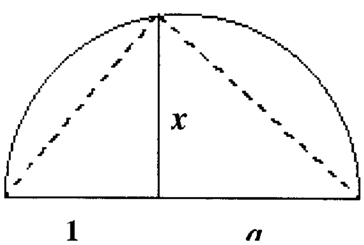

(iv) $a < 0$ и $b < 0$; $a \cdot b > 0$




Интуитивна основа везана за оријентацију две осе служи нам за разумевање знака производа зависно од знака његових фактора.

Мишљења смо да овакав геометријски приступ, поред историјског, има и своје пуно дидактичко оправдање. Без тога у настави о реалним бројевима остаје низ празних ходова и формалистичких процедура.

Заиста смешно делује у основношколском уџбенику „дефиниција“ квадратног корена из позитивног броја $a$, кад кажемо да је то позитивно решење једначине $x^2 = a$. У универзитетским курсевима анализе налазимо теорему о егзистенцији квадратног корена. А у садржајима VIII разреда немамо ништа што би нас убеђивало да такво решење постоји, нити се зна шта је $x \cdot x$ (и генералније $a \cdot b$ кад су $a$ и $b$ произвољни реални бројеви). И ову енигму избегавамо геометријски, ако се служимо познатом конструкцијом представљеном овом сликом.




Дакле, *не заборављајмо да су дужи носиоци значења реалних бројева.*

**Литература**


[1] R. Descartes, *Discours de la Méthode*, ( један од три апендикса “Géometrie”), 1637.

[2] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Ernest Flammarion, 1927.

[3] H. Poincaré, *La logic et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement*, L'Enseignement Mathématique, **1**, 157-162, 1899.

[4] I. R. Shafarevich, *Selected Chapters from Algebra*, The Teaching of Mathematics, vol. **I**, 1-2, 1998.