Др Бранислав Боричић

ЛОГИКА ТРОУГЛА

Проблем конструкције троугла на бази задатих елемената је незаобилазан дидактички модел развијања способности апстрактног, у исто време аналитичког и синтетичког, мисаоног процеса код ученика. Тешко би се могла издвојити нека друга дисциплина која, попут геометрије, пружа тако богате могућности подстицања на логичко повезивање чињеница, праћено истовремено речју, формулом и сликом.

У овом кратком осврту ћемо указати на могућности које пружа тај класични задатак конструкције троугла за веродостојно презентирање неких основних логичких категорија. Ту мислимо на појмове као што су *непротивречност*, *независност* и *потпуност* једног логичког или математичког система закључивања. Управо поменути појмови чине темељ теорије логичких система и у њеном контексту се формално и прецизно дефинишу. За потребе овог чланка ћемо најпре дати неформалне описне дефиниције ових појмова, а потом их и илустровати.

За систем закључивања кажемо да је *противречан* уколико је у њему, уз логички исправно извођење, могуће доказати једно тврђење, као и његову негацију; у супротном, систем је *непротивречан*. Противречан систем услова, по правилу, дефинише један непостојећи математички објект или објект са сасвим специфичном улогом.

Пример. Једначина $x+1=x$ нема решење, па можемо рећи да иста 'дефинише' непостојећи број – решење кога нема, док, с друге стране, иста се једначина може употребити и у дефиницији празног скупа: $\emptyset=\{x \mid x+1=x\}$ – објекта са сасвим специфичном улогом у математици. $\triangle$

За скуп услова неког система закључивања кажемо да је *зависан* уколико се неки од тих услова може извести као логичка последица неких од осталих услова; у супротном, систем је *независан*. Зависан систем карактерише 'вишак' услова, који међусобно могу, али и не морају противречити.

Пример. Систем услова (аксиома, једначина) који дефинишу бројеве x и y:

$$2x+3y=7, \quad 4x+6y=14, \quad 3x+2y=8$$

је зависан јер су први и други услов међусобно еквивалентни, па улогу датог система може преузети систем:

$$2x+3y=7, \quad 3x+2y=8 \quad \triangle$$

Коначно, када одређеним системом тврђења или података желимо формално да опишемо један процес (или, као што је то случај у геометрији, једну фигуру) тај опис ћемо сматрати *потпуним* уколико исти описује целину датог процеса; у супротном, систем је *непотпун.* Непотпун систем карактерише 'мањак' података.

Пример. Уколико желимо да опишемо ситуацију у којој је $x = 2 \wedge y = 1$, 'опис':

$$2x + 3y = 7, \quad 4x + 6y = 14$$

мада истинит, није потпун. $\triangle$

Све ове појмове ћемо илустровати и примерима о конструкцији троугла. Користићемо, како је то уобичајено у школским уџбеницима, следеће ознаке: a, b, c – за странице наспрам темена A, B, C посматраног троугла, те α, β, γ – за одговарајуће унутрашње углове, редом, у теменима A, B, C. Задатак је: *конструисати троугао на бази задатих елемената.* Овај задатак нам пружа довољно добар контекст да у њему прикажемо (не)противречност, (не)зависност и (не)потпуност.

Подразумеваћемо да се ради о систему еуклидске геометрије за који је карактеристично да је збир унутрашњих углова троугла једнак опруженом углу.

Пример. Пођимо од правоуглог троугла који представља једну 'половину' једнакостраничног троугла са страницом дужине 6. Следећи системи података:

$$a = 3, \quad c = 6$$
$$a = 3, \quad \beta = 60^0$$
$$a = 3, \quad b = 3\sqrt{3}$$

су независни и непротивречни, и представљају непотпуне описе датог троугла.

Системи података:

$$a = 3, \quad b = 3\sqrt{3}, \quad c = 6$$
$$a = 3, \quad c = 6, \quad \beta = 60^0$$

су независни и непротивречни, али представљају потпуне описе датог троугла.

Систем података:

$$a = 3, \quad b = 3\sqrt{3}, \quad c = 6, \quad \beta = 60^0$$

је непротивречан и потпун, али није независан, јер је податак $\beta = 60^0$ последица преостала три податка, исто као што је, на пример, и податак $b = 3\sqrt{3}$ такође логичка последица преостала три податка.

Јасно је и да би систем

$$a = 3, \quad b = 3\sqrt{3}, \quad c = 6, \quad \beta = 61^0$$

био противречан, јер у еуклидској геометрији не постоји троугао који би имао задата својства; у противном, требало би да је $60^0 = 61^0$. $\triangle$

Системи услова које смо разматрали у горњем примеру су алгебарског (и синтаксног) карактера, док је троугао који треба са њима повезивати геометријског (и семантичког) карактера. Наиме, сваки торугао који задовољава дате услове можемо сматрати *моделом* датог система и као природан *критеријум непротивречности* можемо истаћи *егзистенцију модела* за посматрани систем.