Милан Живановић

ПИТАГОРИНЕ ТРОЈКЕ И ФИБОНАЧИЈЕВ НИЗ

У једном од претходних бројева *Наставе математике* у чланку *Инваријантна пресликавања Питагориних тројки*[1], видели смо два поступка за генерисање свих основних Питагориних тројки. Ослањајући се на тај текст, показаћемо сада и једну интересантну везу између чланова Фибоначијевог низа и Питагориних тројки.

Дефиниција. Низ природних бројева $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ дефинисан почетним условима $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и рекурентном формулом $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$ зове се Фибоначијев низ.

Може се показати да је општи члан овог низа дат формулом

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Посматрајмо низ уређених тројки $(F_{n+2}F_{n-1}, 2F_{n+1}F_n, F_{n+1}^2 + F_n^2)$, $n \geqslant 2$. Први члан те тројке можемо трансформисати на следећи начин

$$F_{n+2}F_{n-1} = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) = F_{n+1}^2 - F_n^2.$$

С обзиром на теорему 1 из горе поменутог чланка, закључујемо да дати низ представља низ Питагориних тројки

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} x_n = F_{n+2}F_{n-1} \\ y_n = 2F_{n+1}F_n \\ z_n = F_{n+1}^2 + F_n^2 \end{pmatrix}, \qquad n \geqslant 2.$$

Тројка из тог низа ће бити основна ако су узастопни чланови Фибоначијевог низа F_n, F_{n+1} узајамно прости и различите парности. Први услов је испуњен. Заиста, ако претпоставимо супротно, да F_n, F_{n+1} имају заједнички делилац $d \geqslant 2$, тада важи низ једнакости

$$\begin{aligned} F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \equiv 0 \pmod{d}, \\ F_{n-2} &= F_n - F_{n-1} \equiv 0 \pmod{d}, \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ F_1 &= F_3 - F_2 \equiv 0 \pmod{d}, \end{aligned}$$

што је због $F_1 = 1$ немогуће.

[1] Настава математике L, 1–2 (2005), 41–46.

Математичком индукцијом ћемо доказати и следеће тврђење.

Теорема 1. *Подниз* $(F_{3k})_{k\in\mathbf{N}}$ *Фибоначијевог низа је низ парних бројева.*

Доказ. Лако се проверава да је за $k=1$, F_3 парно. Претпоставимо да је тврђење тачно за све чланове подниза чији се индекс изражава помоћу бројева мањих од k. Тада је:

$$F_{3k}=F_{3k-1}+F_{3k-2}=2F_{3k-2}+F_{3(k-1)}.$$

Како је $2F_{3k-2}$ парно, а такође и $F_{3(k-1)}$ по индукцијиској хипотези, то је и збир F_{3k} паран. ■

Закључујемо да су остали чланови Фибоначијевог низа непарни.

Одговарајуће разлике између хипотенузе и катета у троугловима којима одговара низ (1) су:

$$\begin{aligned}\alpha_n&=z_n-y_n=F_{n+1}^2+F_n^2-2F_{n+1}F_n=(F_{n+1}-F_n)^2=F_{n-1}^2,\\ \beta_n&=z_n-x_n=F_{n+1}^2+F_n^2-F_{n+2}F_{n-1}=F_{n+1}^2+F_n^2-(F_{n+1}^2-F_n^2)=2F_n^2.\end{aligned}$$

Низ пречника кружница уписаних у те троуглове ће бити

$$\begin{aligned}\gamma_n&=x_n+y_n-z_n=F_{n+2}F_{n-1}+2F_{n+1}F_n-(F_{n+1}^2+F_n^2)\\ &=F_{n+1}^2-F_n^2+2F_{n+1}F_n-F_{n+1}^2-F_n^2=2F_{n+1}F_n-2F_n^2\\ &=2F_n(F_{n+1}-F_n)=2F_nF_{n-1}.\end{aligned}$$

За конструкцију још једне класе Питагориних тројки дефинисаних помоћу чланова Фибоначијевог низа, докажимо још једно помоћно тврђење.

Теорема 2. *За природан број* $k\geqslant 2$ *и* $n\in\mathbf{N}$ *важи следећа једнакост међу члановима Фибоначијевог низа*

$$F_{n+k}=F_kF_{n+1}+F_{k-1}F_n.$$

Доказ. За $k=2$ је $F_{n+2}=F_2F_{n+1}+F_1F_n=F_{n+1}+F_n$, па је тврђење тачно. Претпоставимо да је оно тачно и за $k=m$:

$$F_{n+m}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n.$$

Тада је за $k=m+1$,

$$\begin{aligned}F_{n+m+1}&=F_{n+m}+F_{n+m-1}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n+F_{m-1}F_{n+1}+F_{m-2}F_n\\ &=(F_m+F_{m-1})F_{n+1}+(F_{m-1}+F_{m-2})F_n=F_{m+1}F_{n+1}+F_mF_n,\end{aligned}$$

што је и требало доказати. ■

На основу доказаног је

$$\begin{aligned}F_{2n}&=F_{n+n}=F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_n=F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\\ &=(F_{n+1}-F_{n-1})(F_{n+1}+F_{n-1})=F_{n+1}^2-F_{n-1}^2,\quad n\in\mathbf{N}.\end{aligned}$$

Закључујемо да је и

$$\text{(2)}\qquad \begin{pmatrix} x_n = F_{2n} \\ y_n = 2F_{n+1}F_{n-1} \\ z_n = F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

такође низ Питагориних тројки.

Одговарајуће разлике између хипотенуза и катета су:

$$\alpha_n = z_n - y_n = F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 - 2F_nF_{n-1} = (F_{n+1} - F_{n-1})^2 = F_n^2,$$
$$\beta_n = z_n - x_n = F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 - (F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2) = 2F_{n-1}^2.$$

Низ пречника уписаних кружница је

$$\gamma_n = x_n + y_n - z_n = \sqrt{2\alpha_n\beta_n} = 2F_nF_{n-1},$$

тј. пречници кружница уписаних у троуглове (1) и (2) су једнаки.

С обзиром на теорему 3 из напред поменутог чланка, закључујемо: око исте кружнице могуће је конструисати два Питагорина троугла, чије су странице изражене помоћу чланова Фибоначијевог низа и основних операција без дељења. Узимајући прво $\alpha_n = 1$ и $\beta_n = 2F_n^2F_{n-1}^2$, добија се низ Питагориних тројки

$$\text{(3)}\qquad \begin{pmatrix} x_n = 1 + 2F_nF_{n-1} \\ y_n = 2F_n^2F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1} \\ z_n = 1 + 2F_n^2F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbf{N},$$

и друго, за $\alpha_n = F_n^2F_{n-1}^2$ и $\beta_n = 2$, имамо следећи низ Питагориних троуглова:

$$\text{(4)}\qquad \begin{pmatrix} x_n = F_n^2F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1} \\ y_n = 2 + 2F_nF_{n-1} \\ z_n = F_n^2F_{n-1}^2 + 2 + 2F_nF_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

На основу досад изложеног, може се закључити:

- у случају да је $n = 3k - 1$, $k \in \mathbf{N}$, биће непарни и F_n и F_{n-1}. Како су ти чланови Фибоначијевог низа и узајамно прости, сва четрири претходно дефинисана низа Питагориних тројки представљају основне Питагорине тројке;
- за $n = 3k$, $k \in \mathbf{N}$, биће F_n парно, а F_{n-1} непарно; у том случају тројке (1) и (3) су основне, а тројке (2) и (4) изведене;
- ако је $n = 3k + 1$, $k \in \mathbf{N}$, онда је F_n непарно, а F_{n-1} парно; тада су тројке (2) и (3) основне, а (1) и (4) су изведене.

У следећим табелама наведено је по неколико чланова сваког од дефинисаних низова Питагориних тројки.

n	F_n	$x_n = F_{n+2}F_{n-1}$	$y_n = 2F_{n+1}F_n$	$z_n = F_{n+1}^2 + F_n^2$
1	1			
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	16	30	34
5	5	39	80	89
6	8	105	208	233
7	13	272	546	610
8	21	715	1428	1597
9	34	1869	3740	4181
10	55	4896	9790	10946
11	89	12815	25632	28657
12	144	33553	67104	75025
13	233	87840	175682	196418
14	377	229971	459940	514229
15	610	602069	1204140	1346269
16	987	1576240	3152478	3524578
17	1597	4126647	8253296	9227465
18	2584	10803705	21607408	24157817
19	4181	28284464	56568930	63245986

Табела 1

n	F_n	$x_n = 2F_nF_{n-1} + 1$	$y_n = 2F_n^2F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1}$	$z_n = 1 + 2F_n^2F_{n-1}^2 + 2F_nF_{n-1}$
1	1			
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	13	84	85
5	5	31	480	481
6	8	81	3280	3281
7	13	209	21840	21841
8	21	547	149604	149605
9	34	1429	1021020	1021021
10	55	3741	6997540	6997541
11	89	9791	47931840	47931841
12	144	25633	328525344	328525345
13	233	67105	2251540512	2251540513
14	377	175683	15432258244	15432258245

Табела 3

n	F_n	$x_n = F_{2n}$	$y_n = 2F_{n+1}F_{n-1}$	$z_n = F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2$
1	1			
2	1	3	4	5
3	2	8	6	10
4	3	21	20	29
5	5	55	48	73
6	8	144	130	194
7	13	377	336	505
8	21	987	884	1325
9	34	2584	2310	3466
10	55	6765	6052	9077
11	89	17711	15840	23761
12	144	46368	41474	62210
13	233	121393	108576	162865
14	377	317811	284260	426389
15	610	832040	744198	1116298
16	987	2178309	1948340	2922509
17	1597	5702887	5100816	7651225
18	2584	14930352	13354114	20031170
19	4181	39088169	34961520	52442281

Табела 2

n	F_n	$x_n = F_n^2 F_{n-1}^2 + 2F_{n+1}F_{n-1}$	$y_n = 2F_nF_{n-1} + 2$	$z_n = F_n^2 F_{n-1}^2 + 2 + 2F_nF_{n-1}$
1	1			
2	1	3	4	5
3	2	8	6	10
4	3	48	14	50
5	5	255	32	257
6	8	1680	82	1682
7	13	11024	210	11026
8	21	75075	548	75077
9	34	511224	1430	511226
10	55	3500640	3742	3500642
11	89	23970815	9792	23970817
12	144	164275488	25634	164275490
13	233	1125803808	67106	1125803810
14	377	7716216963	175684	7716216965

Табела 4