Др Ђурђица Такачи, Марјетица Самарџијевић

ВИЗУАЛНИ ПРИСТУП ДЕФИНИЦИЈИ ИЗВОДА ФУНКЦИЈЕ

1. Увод

Успешност васпитно-образовног рада зависи од разноврсности коришћења наставних облика, метода и средстава. Њиховим правилним и креативним комбиновањем се подстиче активно ангажовање ученика у наставном процесу, а самим тим је остваривање постављених циљева и задатака извесније и успешније.

У наставном процесу је корисно комбиновање различитих методичких решења и избор оних метода које су најпогодније за постизање дефинисаних циљева и које су усклађене са садржајем наставе и узрасним и развојним карактеристикама ученика.

Један од циљева је „да ученик треба да буде оспособљен за коришћење различитих информација (укључујући стручну и научну литературу); различитих облика информатичких и комуникационих средстава; за критички однос у примању, разумевању и размени информација и критички однос према изворима информација.“ [8]

Постоји низ различитих програмских пакета намењених раду са математичким садржајима, као што су `Mathematica, Maple, Auto-cad, Scientific WorkPlace` и други. Већина њих омогућава вршење симболичких, нумеричких и графичких операција, тако да „графичке могућности рачунара помажу да се математика види, алгебарски део софтвера обезбеђује да се математика ради, а користећи изражајност програмског језика математика ствара … “

„Шарене слике“ могу учинити математичке чињенице стварнијим и прихватљивијим за ученике, а самим тим оне постају боље разумљиве и лакше употребљиве. Међутим оне не могу помоћи да се разуме веза између унетих података и добијене слике, па рачунар јесте и треба да буде помоћно средство које ће у комбинацији са другим наставним средствима дати боље резултате.

Увођењем рачунара у наставу се не умањује улога наставника. Он и даље остаје централна личност, предавач и водитељ.

Идеја за овај рад је потекла је из реченице:

„Компјутер ће направити револуцију у математичком образовању, не само способношћу брзог рачунања, него и способношћу приказивања покретних слика. Те могућности се користе у интерактивним програмима да прикажу идеју диференцирања и интеграције … “ (David Tall 1983).

Рад садржи илустративни приступ обраде дефиниције извода функције једне реалне променљиве. Рачунар омогућава визуализацију граничног процеса који је у основи дефиниције извода функције.

Коришћен је програмски пакет `Scientific WorkPlace` у оквиру којег се математика ради уз подршку једне верзије `Maple`-а, али се исте идеје могу реализовати и помоћу осталих програмских пакета.

2. Визуализација количника прираштаја

Приликом обраде наставне теме ИЗВОД ФУНКЦИЈЕ уводни часови се посвећују формирању појмова:

- прираштај аргумента $\Delta x = x - x_0$,
- прираштај функције $\Delta f = f(x) - f(x_0)$,
- количник прираштаја $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

у тачки x_0.

Ради једноставности често се уместо Δx користи ознака h.

Извод реалне функције једне реалне променљиве уводи се преко граничне вредности количника прираштаја

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{1}$$

у тачки x.

У нашим школама се израчунавања граничних вредности [1] за елементарне функције раде углавном после часова утврђивања градива граничне вредности функција, односно као примена граничне вредности. У свету, на пример у Енглеској, ученици се први пут срећу са ознаком граничне вредности баш у моменту када дефинишу први извод функције. Зато се велики значај придаје визуалном приступу дефиниције извода функције.

На основу искуства је познато да у овом узрасном добу и наши ученици често немају јасну слику граничног процеса, посебно када се посматра гранична вредност количника прираштаја.

У циљу увођења појма извода функције $f\colon D \to R$ (једне реалне променљиве) формира се (за одређене функције) количник прираштаја (у произвољној тачки x), који ћемо означити са

$$k(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2}$$

Функција k јесте функција две променљиве x и h, међутим, у даљем раду се прате промене вредности h. За свако одабрано h добија се функција k, која сада зависи само од x и црта се њен график помоћу рачунара.

Уочавамо да, ако се вредност h смањује и тежи нули, тада се графици одговарајућих функција k „приближавају“ графику једне функције, што се на слици види „подуплавањем кривих“. На тај начин се визуално долази до графика изводне функције, која је резултат граничног процеса и која се означава са f'.

Елементарне функције имају извод практично у свакој тачки свог домена и зато ћемо визуални приступ приказати помоћу одабраних примера за:

- степене функције, тј. функције f облика $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{Z})$;
- корене функције, тј. функције f облика $f(x) = \sqrt[n]{x}$ $(n \in \mathbf{N})$;
- експоненцијалне функције, тј. функције f облика $f(x) = a^x$ $(a > 0)$;
- логаритамске функције, тј. функције f облика $f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$;
- тригонометријске функције: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

3. Визуализација првог извода функције

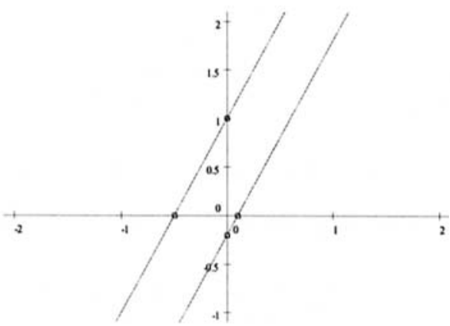
3.1. Степена функција

У првом примеру посматраћемо степену функцију и визуално одредити њен извод.

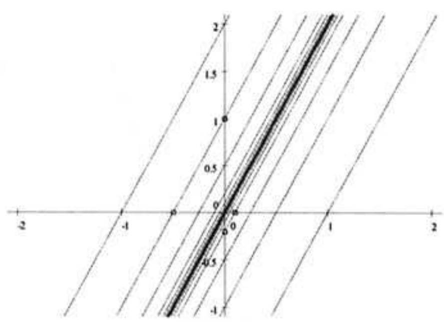
Пример 1. За функцију $f(x) = x^2$ количник прираштаја је

$$k(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Графици функције k, за различите вредности h, приказани су на слици 1 и на слици 2.



Сл. 1



Сл. 2

Ако изаберемо $h = 1$ и посматрамо тачке $A(-.5, 0)$ и $B(0, 1)$, које припадају графику функције $k(x, 1)$ (слика 1), тада је једначина праве одређене тачкама A и B, $y = 2x + 1$.

Аналогно се за $h = -0.2$ и тачке $C(.1, 0)$ и $D(0, -0.2)$, које припадају графику функције $k(x, -0.2)$ (слика 1), добија једначина праве одређене тачкама C и D $y = 2x - 0.2$.

Количник прираштаја k се може написати као

$$k(x,h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h,$$

па се за $h = 1$ и $h = -0.2$ добија $k(x,1) = 2x+1$, $k(x,0.2) = 2x-0.2$, респективно. Значи, права $y = 2x+1$ јесте график функције $k(x,1)$, односно права $y = 2x+0.2$ јесте график функције $k(x,0.2)$.

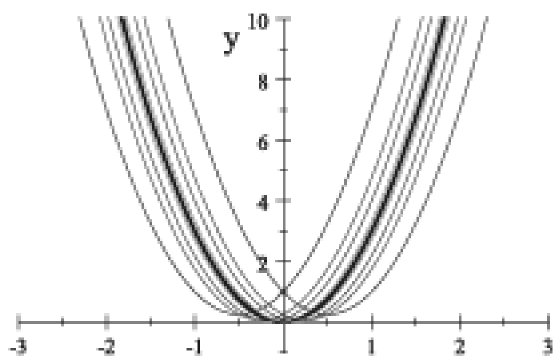
Даље, посматрајући праву дату са $k(x,h) = 2x+h$, можемо рећи да ако одсечак h на y оси тежи нули, тада одговарајући графици функција k теже графику функције $y = 2x$.

Закључак: Функција $y = 2x$ је изводна функција функције $f(x) = x^2$. $\triangle$

Пример 2. За функцију $f(x) = x^3$ количник прираштаја је

$$k(x,h) = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

Графици функције k за различите вредности h су приказани на слици 3.



Сл. 3

Применом алгебарских трансформација добија се

$$k(x,h) = 3x^2 + 3xh + h^2,$$

одакле следи да, када h тежи нули, добијамо функцију $y = 3x^2$, чији график одговара графику функције g за $a = 3$.

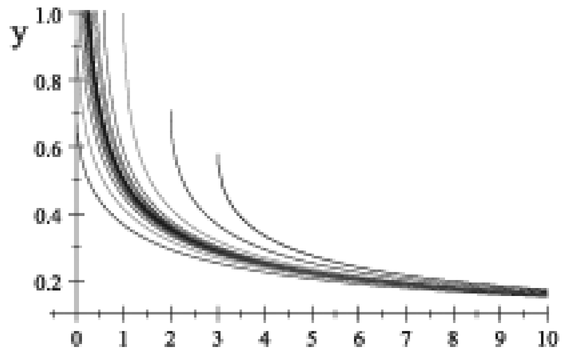
Ово можемо потврдити и ефективним израчунавањем:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$$

Закључак: Изводна функција функције $f(x) = x^3$ јесте $f'(x) = 3x^2$. $\triangle$

У оба примера можемо директно користити рачунар и добити $f'(x) = 2x$, у првом и $f'(x) = 3x^2$ у другом примеру.

На основу овако стеченог (веома скромног) искуства ученика (или на основу закључивања по аналогији), може се указати да таблични извод функције $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, јесте $f'(x) = nx^{n-1}$.



Сл. 4

Пример 3. Функција $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, има количник прираштаја $k(x,h) = \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$, чији су графици за различите вредности h приказани на слици 4.

У овом случају није лако, на основу графика, препознати изводну функцију, па израчунавањем добијамо

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Дакле за $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, први извод је $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$. $\triangle$

Ако ту исту функцију посматрамо у облику степена $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $x > 0$, тада је $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $x > 0$; што није у супротности са закључком о изводу степене функције, без обзира на чињеницу да степен није природан број. Па ето идеје и прилике да се формула уопшти и на случај да је степен рационалан број, уз дужно поштовање свих услова о дефинисаности саме функције.

3.2. Експоненцијална функција

Посматраћемо прво функцију 2^x, а затим функцију e^x.

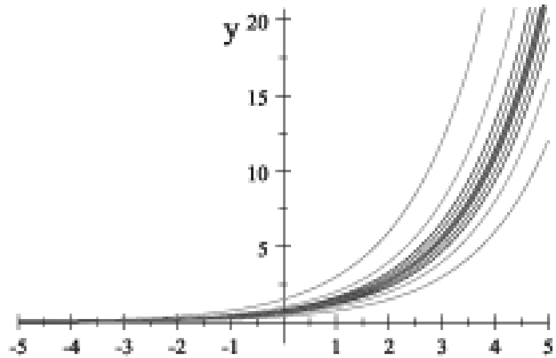
Пример 4. За функцију $f(x) = 2^x$ је $k(x,h) = \dfrac{2^{x+h} - 2^x}{h}$, чији су графици приказани на слици 5, за различите вредности h.

Визуално: график изводне функције јесте експоненцијална крива.

Овом методом не може се прецизно одредити изводна функција. Зато се ради израчунавање класичним путем:

$$\lim_{h\to 0} \frac{2^{x+h} - 2^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^x(2^h - 1)}{h} = 2^x \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} = 2^x \ln 2,$$

или помоћу рачунара $f'(x) = 2^x \ln 2$. $\triangle$



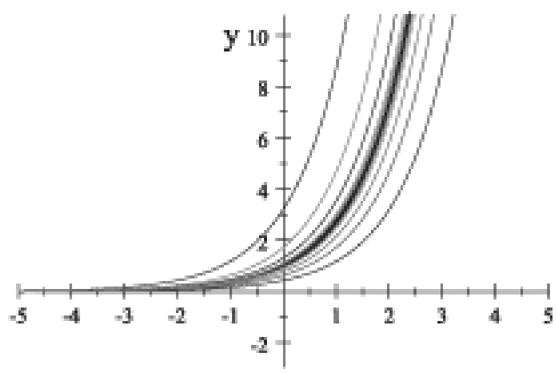
Сл. 5

Аналогно се изводи закључак и за експоненцијалну функцију уопште, тј. за функцију $f(x) = a^x$, $a > 0$. Извод се одређује по дефиницији

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a, \quad a > 0.$$

Међу експоненцијалним функцијама издваја се функција $f(x) = e^x$.

Пример 5. Поступајући аналогно претходним примерима посматрамо функцију $k(x, h) = \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h}$ и цртамо графике за разне вредности h (слика 6).



Сл. 6

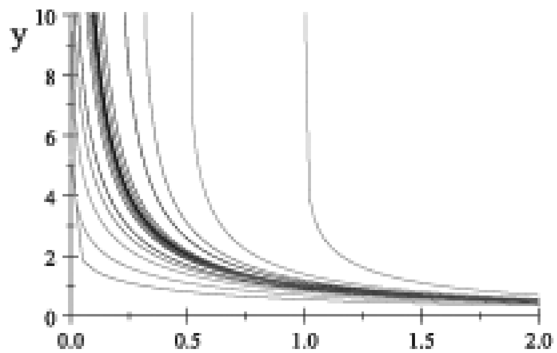
Као што се на слици види, добијене криве теже ка графику неке експоненцијалне функције, када h тежи нули, а на основу закључка из претходног примера то је функција $e^x \ln e$ односно e^x.

Значи, изводна функција функције e^x је сама та функција; а баш по томе се ова функција издваја од осталих. $\triangle$

3.3. Логаритамска функција

Од логаритамских функција $f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$, $x \in \mathbf{R}^+$, издвајамо функцију $y = \ln x$ чији се извод налази у таблицама извода.

Пример 6. За $y = \ln x$, количник прираштаја је $k(x,h) = \dfrac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$, чији су графици приказани на слици 7, за различите вредности h.



Сл. 7

„Подуплавањем“ графика добија се одређена крива и од ученика се може очекивати да препознају функцију чији је то график. Ученицима се може помоћи утолико што се одвојено нацрта график функције $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, па се добијене слике упореде.

Закључак: изводна функција функције $f(x) = \ln x$, $x > 0$ јесте $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$.

Примедба: ово се може радити у гимназијама, а у средњим стручним школама закључак се изводи аналогно претходним примерима. $\triangle$

3.4. Тригонометријске функције

Посматраћемо функцију $f(x) = \sin x$ и визуално и помоћу дефиниције одредити њен извод. За функцију $f(x) = \cos x$ поступак је аналоган.

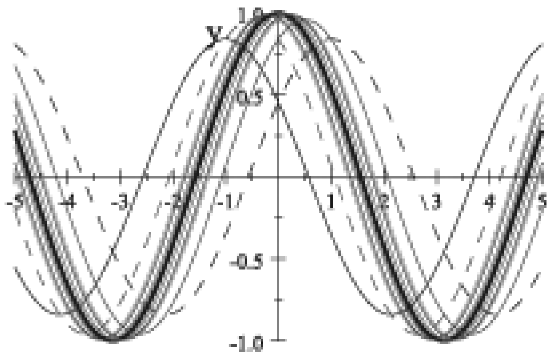
Пример 7. За функцију $f(x) = \sin x$, одговарајући количник

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

означићемо са $k_s(x,h)$ и на слици 8 приказати графике које добијамо варирајући вредности за h.

Интересантно је приметити да примена тригонометријских трансформација у оквиру $k_s(x,h)$ даје

$$k_s(x,h) = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

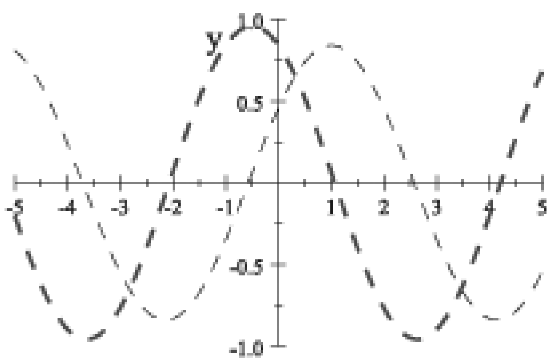


Сл. 8

одакле видимо да је за тачку x везан само чинилац $\cos(x + \frac{h}{2})$. Приметимо да су количници прираштаја k_s функције облика

$$A(h)\cos\left(x + \frac{h}{2}\right), \qquad \text{где је} \quad A(h) = \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}.$$

На пример, за $h = 2$ је $A(1) = \dfrac{2\sin 1}{2} = 0.841\,47$, односно за $h = -1$ је $A(-1) = \dfrac{2\sin(-\frac{1}{2})}{-1} = 0.958\,85$. Графици функција $0.841\,47\cos(x+1)$ и $0.958\,85\cos(x - \frac{1}{2})$ су приказани испрекиданом линијом на сликама 8 и 10, а издвојено на слици 9.

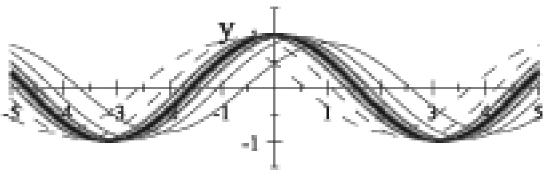


Сл. 9

Даље можемо са ученицима анлизирати графике функција k_s. Ако $h \to 0$ тада се $A(h)$ повећава и тежи 1, па максимуми функција k_s повећавају и теже 1. График функције $\cos(x + \frac{h}{2})$ се може сматрати да је настао тако што се график функције $\cos x$ транслира за $\frac{h}{2}$, и $\cos(x + \frac{h}{2})$ тежи ка $\cos x$, када h тежи 0. Значи имамо:

$$\lim_{h\to 0} k_{x,s}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1\cdot \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x.$$

Представљањем слике у координатном систему са једнаким јединичним подеоцима ученицима постаје уочљивије да је крива на слици 10 график функције $y=\cos x$.



Сл. 10

Закључак: изводна функција функције $f(x)=\sin x$ јесте $f'(x)=\cos x$. $\triangle$

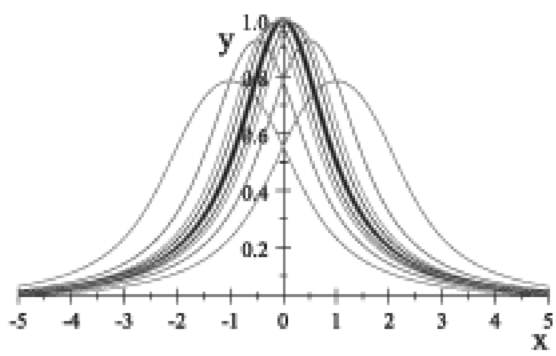
3.5. Остале функције

Одређивање извода функције $f(x)=\operatorname{arctg} x$ је занимљиво за визуалну презентацију, јер се не мора користити формула за извод инверзне функције, која ученицима може да представља проблем.

Пример 8. За функцију $f(x)=\operatorname{arctg} x$, графици количника прираштаја

$$k(x,h)=\frac{\operatorname{arctg}(x+h)-\operatorname{arctg} x}{h}$$

су, за разне вредности за h, приказани на слици 11. Веома се лепо види да када h тежи нули, тада графици количника прираштаја теже графику функције $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\triangle$



Сл. 11

4. Закључак

Извод функције се најчешће обрађује у средњим школама четвртог степена као и на првој години факултета. Зато сматрамо да је приказана визуална презентација увођења појма извода веома корисна и да може да допринесе бољем схватању како извода функције, тако и количника прираштаја и граничне вредности функције. На основу изложеног можемо истаћи да метод визуализације није довољан за одређивање изводне функције. Зато приказани поступак треба употпунити осталим, већ устаљеним, методама зависно од математичких садржаја који се обрађују у школи.

Литература

[1] З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 3*, Круг, Београд, 1998.

[2] Ј. Д. Кечкић, *Математика са збирком задатака за четврти разред гимназије*, Наука, Београд, 1993.

[3] М. Обрадовић, Д. Георгијевић, *Математика са збирком задатака за четврти разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.

[4] Ђ. Такачи, А. Такачи, *Диференцијални и интегрални рачун,* Стилос, Нови Сад 1997.

[5] D. Tall, *Comments on the difficulties and validity of various approaches to the Calculus for the learning of Mathematics*, **2**, 2 (1981), 16–21.

[6] D. Tall, A. Vinner, *Concept image and concept definition Mathematics with particular reference to limits and continuity*, Education Studies in Mathematics, **12** (1981), 159–169.

[7] D. Tall, *The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof*, in: Grouws D. A., *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495–511, 1991.

[8] D. Tall, *Recent developments in the use of computer to visualize and symbolize Calculus concepts*, The Laboratory Approach to Teaching Calculus, M.A.A. Notes, **20** (1991), 15–25.