Др Светозар Милић

ПРАВОУГЛИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ

Чланак је компонован од фрагмената нашег приручника за наставнике[1]. Односи се на обраду садржаја из наставне теме Правоугли координатни систем.

1. Познато је да је бројевна права, у ствари, „обројена" права. Такође је познато да је координатни систем раван којој су додељене две управне бројевне праве. Те бројевне праве (x-оса, апсцисна оса и y-оса, ординатна оса) секу се у тачки O, која се назива координатни почетак.

Основна Декартова идеја јесте „обројавање" равни, тј. да се свакој тачки равни придружи одговарајући уређени пар реалних бројева (и обратно).

Уређену двојку бројева x и y записујемо као (x, y); x је први, а y други члан уређене двојке, док код двочланих скупова редослед чланова није битан, тј. $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Два уређена пара бројева су једнака када је први члан прве двојке једнак првом члану друге двојке и други члан прве двојке једнак другом члану друге двојке. То важно својство уређених парова бројева (једнакост уређених двојки) записује се као

$$(*) \qquad (a, b) = (c, d) \iff a = c \land b = d.$$

Напомена. Тиме, наравно, нисмо дефинисали уређену двојку. Њу треба дефинисати тако да на основу неке дефиниције следи формула $(*)$. Ево једне дефиниције:

$$(a, b) = \{\,\{a\}, \{a, b\}\,\}.$$

Дакле, уређена двојка је скуп од највише два члана, јер за $a = b$ имамо $(a, a) = \{\{a\}\}$. Сада се помоћу једнакости скупова доказује да важи формула $(*)$. Тај доказ је једноставан, па га остављамо за вежбу.

Уколико радимо са природним бројевима, рецимо, тада уређену двојку $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ можемо дефинисати, на пример, овако:

$$(a, b) = 2^a \cdot 3^b.$$

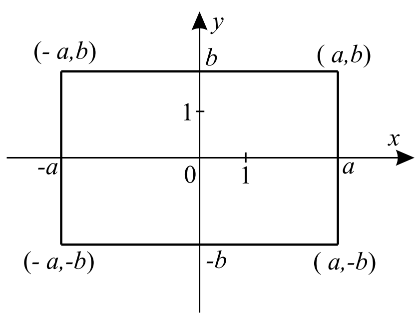
[1] Светозар Милић, Бранко Јевремовић, Марко Игњатовић, ***Приручник уз уџбеник математике за седми разред основне школе***, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд 2004, 85 стр.

Докажимо да важи формула (∗). Заиста,

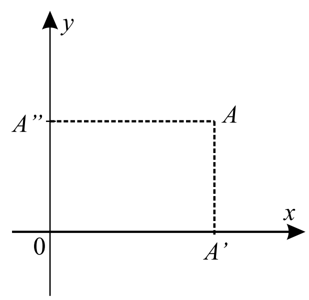
$$\begin{aligned}(a,b)=(c,d) &\iff 2^a\cdot 3^b = 2^c\cdot 3^d\\ &\iff 2^{a-c}=3^{d-b}\\ &\iff a-c=0\wedge d-b=0\\ &\iff a=c\wedge b=d.\end{aligned}$$

Уређена двојка (a,b) представља се у координатном систему тако што се најпре одреде тачке x_1 и y_1 на координатним осама, где је $x_1=a$, $y_1=b$, а затим одреди тачка којој се једнозначно придружује двојка (a,b) као четврто теме правоугаоника чија су три темена x_1, O, y_1, тј. a, O, b.

На пример, за $a>0$ и $b>0$ приказане су уређене двојке (a,b), $(-a,b)$, $(-a,-b)$, $(a,-b)$, сл. 1.



Сл. 1



Сл. 2

Основни циљ обројавања равни јесте да се свакој уређеној двојци бројева придружи тачка равни, и обратно. На слици видимо уређене двојке, на пример (a,b), док су на правим x и y само реални бројеви. Значи да број a на x-оси, у ствари, представља тачку којој је придружена двојка $(a,0)$, а број $-b$ тачку на y-оси којој је придружена тачка $(0,-b)$.

Обратно, нека је A произвољна тачка координатног система. Њене ортогоналне пројекције на осама су A' на x-оси и A'' на y-оси, сл. 2. Како су осе бројне праве, то тачки A' одговара реалан број x_1, а тачки A'' број y_1. На тај начин имамо уређену двојку на осама, на пример, тачки A' одговара уређена двојка $(x_1,0)$, а тачки A'' уређена двојка $(0,y_1)$; тачки A одговара двојка (x_1,y_1). На тај начин раван је помоћу координатног система обројена уређеним двојкама. Како је $(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, где је $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ директан производ скупа реалних бројева са самим собом, тј.

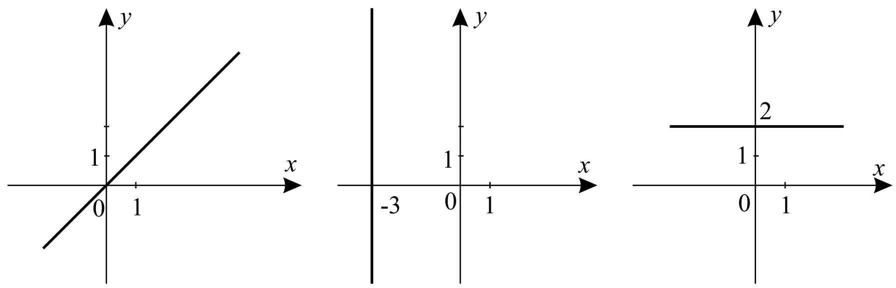
$$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{\,(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\,\},$$

то имамо да је Декартов производ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ координатна раван.

Наведимо неке подскупове тачака координатне равни, на пример:

$$1)\ \{(x,x)\mid x\in\mathbf{R}\};\quad 2)\ \{(-3,y)\mid y\in\mathbf{R}\};\quad 3)\ \{(x,2)\mid x\in\mathbf{R}\}.$$

Графички приказ тих подскупова у координатном систему дат је на слици 3.



Сл. 3

У ствари, пример 1) је симетрала првог и трећег квадранта, пример 2) права нормална на x-осу, а пример 3) права нормална на y-осу. За симетралу под 1), у ознаци Δ, кажемо да је дијагонала Декартовог производа $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

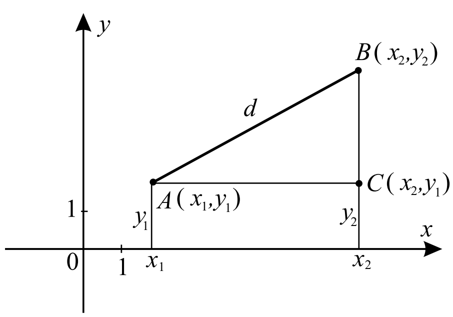
2. Познато је да две различите тачке $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ одређују дуж AB. Ради одређивања дужине дужи, за растојање $d(A, B)$ захтевамо да важи:

1) $d(A, B) \geqslant 0$, $d(A, A) = 0$ (растојање је ненегативно)
2) $d(A, B) = d(B, A)$ (симетрија)
3) $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(B, C)$ (релација троугла)

Према томе, растојање d је произвољна функција два аргумента која задовољава услове 1) до 3). Једна од таквих функција јесте

(**)

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Сл. 4

За дате тачке то растојање добија се на следећи начин (сл. 4): у правоуглом троуглу ABC дужине дужи AC и BC су $|x_2 - x_1|$, односно $|y_2 - y_1|$; тражимо $d(A, B)$. По Питагориној теореми добијамо да важи формула $(**)$ јер је $|a - b|^2 = (a - b)^2$.

Напоменимо да је $|x_2 - x_1|$ дужина дужи AC, односно $|y_2 - y_1|$ дужина дужи BC. За тачке $A(x_1, y_1)$ и $C(x_2, y_1)$, на основу $(**)$, сада имамо

$$d(A, C) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Слично, $d(B, C) = |y_2 - y_1|$.

Познато је да је обим многоугла једнак збиру дужина његових страница. На пример, за троугао чија су темена $A(-2, 0)$, $B(2, 2)$, $C(1, -3)$ имамо:

$$d(B, C) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{26}.$$

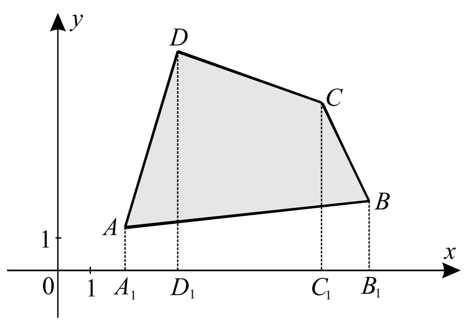
Слично се добијају дужине и остале две странице, $d(A, B) = \sqrt{20}$, $d(A, C) = \sqrt{18}$, па је $O = \sqrt{26} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$.

3. У уџбенику за седми разред, израчунавање површине троугла и четвороугла остварује се полазећи од правоуглог трапеза чија страница, која је једнака висини трапеза, припада x-оси (може и y-оси). Површина таквих трапеза се лако израчунава. Такав приступ је погодан за ученике јер, са графичког приказа, лако очитавају потребне елементе за површину трапеза.

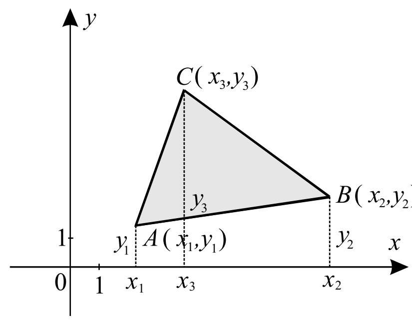
Користећи се таквим трапезима, непосредно је дата и метода за израчунавање површине троугла, као и било ког четвороугла, па и многоугла. Илуструјмо ту методу на примеру четвороугла $ABCD$, сл. 5.

Тачке A_1, B_1, C_1, D_1 су пресеци x-осе и нормала којима припадају темена четвороугла (по редоследу) на x-осу. Тада је

$$P_{ABCD} = P_{AA_1D_1D} + P_{DD_1C_1C} + P_{CC_1B_1B} - P_{AA_1B_1B}.$$



Сл. 5



Сл. 6

Конкретније, на основу изложене методе, за троугао чија су темена $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, површина се непосредно израчунава на следећи начин.

Најпре троугао ABC прикажемо у координатном систему, сл. 6. Овде се површина $\triangle ABC$ добија сабирањем, односно одузимањем површина назначених правоуглих трапеза чије висине „припадају“ x-оси,

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ADEC} + P_{EFBC} - P_{ADBF} \\ &= \left| \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \frac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \right|. \end{aligned}$$

После сређивања добијамо

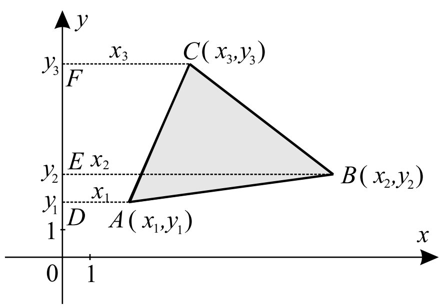
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|.$$

Према томе, површину троугла датих темена непосредно израчунавамо коришћењем наведене формуле. На пример, за троугао чија су темена $A(2, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(4, -3)$ је

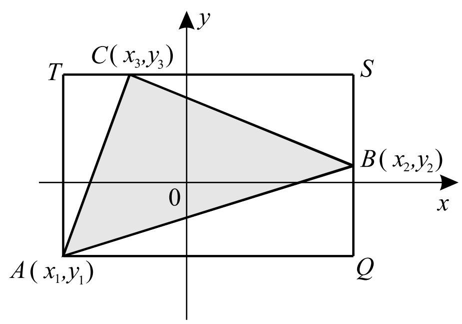
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left| 2(3 - (-3)) + (-2)(-3 - (-1)) + 4(-1 - 3) \right| = 2.$$

Слично, површина $\triangle ABC$ може се израчунати ако се правоугли трапези конструишу тако да њихове висине „припадају“ y-оси, сл.7.

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{ADEB} + P_{EFCB} - P_{ADFC} \\ &= \left| \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)(y_3 - y_2) - \frac{1}{2}(x_1 + x_3)(y_3 - y_1) \right| \\ &= \frac{1}{2} \big| y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2) \big|. \end{aligned}$$



Сл. 7



Сл. 8

Површина троугла може се израчунати и на основу разложиве једнакости површине правоугаоника.

Нека је троугао ABC дат својим теменима $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, сл. 8. Нацртајмо праве које садрже темена $\triangle ABC$ и паралелне су са координатним осама. Те праве образују правоугаоник $AQST$, који је разложиво једнак збиру површина четири троугла, од којих су три правоугла, чије се катете једноставно очитавају, па је

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= P_{AQST} - (P_{AQB} + P_{BSC} + P_{CTA}) \\ &= |x_2 - x_1| \cdot |y_3 - y_1| - \\ &\quad - \frac{1}{2}\big(|x_2 - x_1| \cdot |y_2 - y_1| + |x_3 - x_2| \cdot |y_3 - y_1| + |x_1 - x_3| \cdot |y_1 - y_3|\big). \end{aligned}$$

Слично се може израчунати и површина четвороугла.