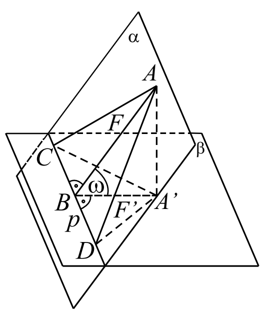
НАСТАВА МАТЕМАТИКЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

Милорад Бељић

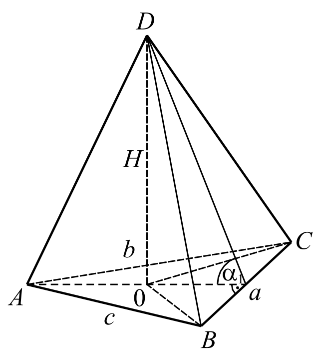
КОСИНУСНА ТЕОРЕМА ЗА ТЕТРАЕДАР

У другом разреду средње школе обрађује се косинусна теорема, а у трећем разреду и стереометрија. Интересантно би било да се на часовима математичке секције обради и косинусна теорема за тетраедар. Ово је утолико значајније што је тетраедар, у много чему просторни аналогон троуглу, недовољно заступљен у средњошколској настави математике.

Дефиниција. Нека фигура F припада равни α (слика 1). Свакој тачки x фигуре F одговара при нормалном пројектовању на неку раван β тачка x' неке фигуре F'. Фигура F' се назива пројекцијом фигуре F.



Сл. 1



Сл. 2

Теорема 1. *Површина S равне фигуре F и повшрина S' њене нормалне пројекције F' везане су релацијом*

$$S' = S\cos\omega, \tag{1}$$

где је ω оштар угао међу равнима у којима леже фигура F и фигура F'.

Доказ. Ограничимо се на случај када дата фигура допушта разбијање на троуглове. Тада се доказ своди на фигуру F која је троугао (на слици 1 троугао ACD).

Нека је α раван којој припада фигура F, а β раван на коју пројектујемо фигуру F.

Ако је $\alpha \parallel \beta$, имамо очигледно $S' = S$, што добијамо и из формуле (1) јер је $\omega = 0$.

Ако равни α и β нису паралелне, оне се секу по некој правој p. Тада, не нарушавајући општост, можемо узети да једна страница троугла F (па, самим тим, и троугла F') припада правој p (сл. 1). Ако је B подножје висине из темена A троугла ACD (тј. фигуре F), тада је, на основу теореме о три нормале, B уједно подножје висине из темена A' троугла $A'CD$ (фигуре F'). Из $\triangle ABA'$ је $A'B = AB \cdot \cos\omega$, па је

$$S' = \frac{1}{2}CD \cdot A'B = \frac{1}{2}CD \cdot AB \cos\omega = S \cdot \cos\omega. \quad \blacksquare$$

Дакле, површина нормалне пројекције неке равне фигуре на раван једнака је производу површине дате фигуре и косинуса угла ω којег те равни образују. Користећи ову теорему можемо доказати да важи и следећа

Теорема 2. *Нека су S_A, S_B, S_C, S_D површине страна тетраедра $ABCD$ које су наспрамне, редом, теменима A, B, C, D, а α, β, γ су углови диедара тетраедра са ивицама DA, DB, DC. Тада је*

$$S_D^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 - 2S_AS_B\cos\gamma - 2S_BS_C\cos\alpha - 2S_CS_A\cos\beta.$$

Доказ. Означимо са α_1, β_1, γ_1 углове диедара тетраедра $ABCD$ са ивицама BC, CA, AB, респективно, и са O подножје висине тетраедра из темена D (сл. 2). Тада је $S_D = S_{BOC} + S_{COA} + S_{AOB}$. Одатле, према теореми 1 добијамо[1]:

(2) $$S_D = S_A\cos\alpha_1 + S_B\cos\beta_1 + S_C\cos\gamma_1,$$

(3) $$S_A = S_D\cos\alpha_1 + S_C\cos\beta + S_B\cos\gamma,$$

(4) $$S_B = S_D\cos\beta_1 + S_A\cos\gamma + S_C\cos\alpha,$$

(5) $$S_C = S_D\cos\gamma_1 + S_A\cos\beta + S_B\cos\alpha.$$

Множењем ових релација, редом, са S_D, S_A, S_B, S_C добијамо:

(2') $$S_D^2 = S_A \cdot S_D\cos\alpha_1 + S_B \cdot S_D\cos\beta_1 + S_C \cdot S_D\cos\gamma_1,$$

(3') $$S_A^2 = S_A \cdot S_D\cos\alpha_1 + S_A \cdot S_C\cos\beta + S_A \cdot S_B\cos\gamma,$$

(4') $$S_B^2 = S_B \cdot S_D\cos\beta_1 + S_A \cdot S_B\cos\gamma + S_B \cdot S_C\cos\alpha,$$

(5') $$S_C^2 = S_C \cdot S_D\cos\gamma_1 + S_A \cdot S_C\cos\beta + S_B \cdot S_C\cos\alpha.$$

Ако једнакости (3'), (4') и (5') саберемо, па збир одузмемо од (2'), добијамо да је

$$S_D^2 - S_A^2 - S_B^2 - S_C^2 = -2S_A \cdot S_B\cos\gamma - 2S_B \cdot S_C\cos\alpha - 2S_C \cdot S_A\cos\beta,$$

што је еквивалентно једнакости која се доказује. $\blacksquare$

Ако су стране S_A, S_B и S_C тетраедра узајамно ортогоналне, тада једнакост претходне теореме добија облик

$$S_D^2 = S_A^2 + S_B^2 + S_C^2$$

и представља уопштење Питагорине теореме на простор $\mathbf{R}^3$.

[1] Релације (2)–(5) представљају просторни аналогон теореме о пројекцијама у равни.

Задаци

1. У тетраедру су два наспрамна диедра права. Доказати да су збирови квадрата површина страна тетраедра које чине те диедре једнаки.
2. Ако су сви диедри неке тростране пирамиде једнаки, тада су све ивице те пирамиде једнаке. Доказати.
3. Ако са H_A, H_B, H_C, H_D обележимо висине, редом, из темена A, B, C, D тетраедра $ABCD$, тада важе једнакости:

   (а) $\dfrac{1}{H_D} = \dfrac{\cos\alpha_1}{H_A} + \dfrac{\cos\beta_1}{H_B} + \dfrac{\cos\gamma_1}{H_C}$, где су α_1, β_1, γ_1 углови диедара са ивицама BC, CA, AB, редом;

   (б) $\dfrac{1}{H_D^2} = \dfrac{1}{H_A^2} + \dfrac{1}{H_B^2} + \dfrac{1}{H_C^2} - \dfrac{2\cos\gamma}{H_A H_B} - \dfrac{2\cos\alpha}{H_B H_C} - \dfrac{2\cos\beta}{H_C H_A}$, где су α, β, γ углови диедара са ивицама DA, DB, DC.