Милан Живановић

ХЕРОНОВЕ ТРОЈКЕ КАО АРИТМЕТИЧКИ НИЗОВИ

Дефиниција. За тројку (a, b, c) природних бројева каже се да је *Херонова* ако троугао чије странице имају дужине a, b и c има целобројну површину.

Сматраћемо подударним Херонове тројке које се добијају једна из друге пермутацијом чланова, те ћемо у даљем увек сматрати да је таква тројка уређена у растућем поретку.

Неки примери Херонових тројки су: $(3,4,5)$, $(5,5,6)$, $(13,14,15)$, $(11,13,20)$, $(5,29,30)$. Прва је уједно и Питагорина тројка, друга представља странице троугла који је настао слепљивањем двеју њених копија дуж заједничке катете 4, трећа слепљивањем Питагориних троуглова са страницама $(5,12,13)$ и $(9,12,15)$ дуж заједничке катете 12, а четврта исецањем троугла $(5,12,13)$ из троугла $(12,16,20)$. Последња тројка не може настати ни на један од горе наведених начина, јер ниједна висина тог троугла није цео број.

У претходним примерима видели смо да постоје Херонове тројке које представљају трочлани аритметички низ. Докажимо да у је том случају мерни број средње по величини странице b паран број. Заиста, ако би важило супротно, како су a и c увек исте парности, изрази $a+b+c$, $a+b-c$, $b+c-a$ и $c+a-b$ би били непарни. Због тога израз $s(s-a)(s-b)(s-c)$ не би био природан број, а онда ни површина одговарајућег троугла није природан број, па троугао није Херонов. Дакле, средњи члан Херонове тројке која је и аритметички низ мора бити паран број.

Овде ћемо дати један поступак за одређивање тројки таквог облика.

Нека је (a, b, c) Херонова тројка која је уједно и растући аритметички низ. Тада је $a = b - d$ и $c = b + d$, $d \in \mathbf{N}$, па је према Хероновом обрасцу

$$P = \sqrt{\frac{3b}{2} \cdot \frac{b-2d}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b+2d}{2}}, \quad \text{одакле} \quad 3b^2(b^2-4d^2) = 16P^2.$$

Заменом $P = \dfrac{1}{2} b \cdot h_b$ последња једнакост, после скраћивања са b^2, постаје

$$3(b^2 - 4d^2) = 4h_b^2.$$

Користећи чињеницу да је b парно, заменом $b = 2l$, $l \in \mathbf{N}$, после скраћивања добијамо

$$3(l^2 - d^2) = h_b^2.$$

Да бисмо имали природна решења, мора бити

$$l^2 - d^2 = 3k^2, \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Анализирајмо последњу једначину са неке природне бројеве k.

I. За $k = 1$ је $(l-d)(l+d) = 3$, па имамо систем

$$l - d = 1, \quad l + d = 3,$$

чије решење је $l = 2$, $d = 1$, $b = 4$, одакле се добија Херонова тројка $(3, 4, 5)$ која је уједно основна Питагорина.

II. Ако је $k = 2$, биће $(l-d)(l+d) = 12$. Да би d био природан број морају $l - d$ и $l + d$ бити исте парности. На основу тога добијамо систем

$$l - d = 2, \qquad l + d = 6,$$

чије решење је $l = 4$, $d = 2$, $b = 8$, а одговарајућа Херонова тројка је $(6, 8, 10)$, дакле изведена Питагорина.

III. Нека је $k = 3$. Одговарајућа једначина је

$$(l-d)(l+d) = 27.$$

Из ње добијамо следеће могуће системе:

1. $l - d = 1$, $l + d = 27$. Решење је $l = 14$, $d = 13$, $b = 28$, а одговарајућа Херонова тројка је $(15, 28, 41)$.

2. $l - d = 3$, $l + d = 9$. Решење је $l = 6$, $d = 3$, $b = 12$, а Херонова тројка је изведена Питагорина $(9, 12, 15)$.

IV. За $k = 4$ добијамо једначину

$$(l-d)(l+d) = 48,$$

а из ње следеће системе и њихова решења:

1. $l - d = 2$, $l + d = 24$, $l = 13$, $d = 11$, $b = 26$, $(a, b, c) = (15, 26, 37)$;

2. $l - d = 4$, $l + d = 12$, $l = 8$, $d = 4$, $b = 16$, $(a, b, c) = (12, 16, 20)$;

3. $l - d = 6$, $l + d = 8$, $l = 7$, $d = 1$, $b = 14$, $(a, b, c) = (13, 14, 15)$.

V. У случају $k = 5$ једначина

$$(l-d)(l+d) = 75$$

се своди на следеће системе:

1. $l - d = 1$, $l + d = 75$, $l = 38$, $d = 37$, $b = 76$, $(a, b, c) = (39, 76, 113)$;

2. $l - d = 3$, $l + d = 25$, $l = 14$, $d = 11$, $b = 28$, $(a, b, c) = (17, 28, 39)$;

3. $l - d = 5$, $l + d = 15$, $l = 10$, $d = 5$, $b = 20$, $(a, b, c) = (15, 20, 25)$.

Описани поступак, дакле, представља алгоритам за добијање Херонових тројки које су уједно и аритметички низови.

Праве Херонове тројке. Ако су бројеви у Хероновој тројци узајамно прости и ако не чине Питагорину тројку, кажемо још и да је Херонова тројка права. Одредимо услове при којима се из решења једначине (1) добијају праве Херонове тројке.

У случају да је вредност израза l^2-d^2 непарна, тражени услов је НЗД$(l-d, l+d)=1$, а у случају парности тог израза треба да је НЗД$(l-d,l+d)=2$.

Заиста, претпоставимо супротно да је НЗД$(l-d,l+d)=p>2$. Ако је p парно, $p=2i$, $i\in\mathbf{N}$, $i>1$, тада је

$$\begin{cases} l-d=2iq \\ l+d=2ir \end{cases} \qquad r>q\geqslant 2 \text{ и } r,q\in\mathbf{N}.$$

Одавде се добија $b=2i(q+r)$, $d=i(r-q)$, $a=b-d=i(3q+r)$, $c=b+d=i(q+3r)$, па бројеви a, b, c нису уајамно прости.

Ако је p непарно, систем

$$\begin{cases} l-d=pq \\ l+d=pr \end{cases} \qquad r>q\geqslant 2 \text{ и } r,q\in\mathbf{N},$$

има природна решења по l и d ако су q и r исте парности и добија се $b=p(q+r)$, $d=p\dfrac{r-q}{2}$. У том случају бројеви a, b, c не би били узајамно прости јер би имали заједнички делилац p.

Значи, услов да из једначине (1) добијемо праве Херонове троуглове је

$$\text{НЗД}\,(l-d,l+d)\leqslant 2 \quad \text{и} \quad l-d,\ l+d \text{ исте парности.}$$

Херонове тројке са узастопним члановима. Посебан случај једначине (1) се добија за $d=1$. Он се односи на Херонове тројке које чине аритметички низ са разликом 1, тј. низ три узастопна природна броја. У том случају се добија једначина $l^2-1=3k^2$, тј.

$$l^2-3k^2=1, \tag{2}$$

а то је Пелова једначина. Можемо је писати у облику

$$(l-k\sqrt{3})(l+k\sqrt{3})=1.$$

Основно решење ове једначине је $(l_1,k_1)=(2,1)$ јер је $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$. Степеновањем ове једначине добијамо опште решење једначине (2) помоћу

$$(l_n-k_n\sqrt{3})(l_n+k_n\sqrt{3})=(2-\sqrt{3})^n(2+\sqrt{3})^n=1, \quad n\in\mathbf{N},$$

где је $l_n=2^n+\binom{n}{2}\cdot 2^{n-2}(\sqrt{3})^2+\binom{n}{4}\cdot 2^{n-4}(\sqrt{3})^4+\cdots$. Како је $b_n=2l_n$, важи

$$b_n=\sum_{i=0}^{n}(1+(-1)^i)\binom{n}{i}\cdot 2^{n-i}\cdot 3^{\frac{i}{2}}=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n, \tag{3}$$

што уз услове

$$a_n = b_n - 1, \qquad c_n = b_n + 1 \tag{4}$$

даје низ Херонових тројки (a_n, b_n, c_n) чији су чланови три узастопна природна броја.

У следећој табели дато је првих десет Херонових тројки дефинисаних формулом (3) и условима (4).

n	a_n	b_n	c_n	P_n
1	3	4	5	6
2	13	14	15	84
3	51	52	53	1170
4	193	194	195	16296
5	723	724	725	226974
6	2701	2702	2703	3161340
7	10083	10084	100855	44031786
8	37633	37634	37635	613283664
9	140451	140452	140453	8541939510
10	524173	524174	524175	118973869476

Рекурентна формула за низ површина Херонових троуглова. Посматрајући последњу колону претходне таблице, емпиријском индукцијом може се закључити да за свако $n \in \mathbf{N}$ важи формула

$$P_{n+2} = 14P_{n+1} - P_n. \tag{5}$$

Докажимо ово тврђење.

Нека је $n \in \mathbf{N}$ и b_n средња по величини страница n-тог Хероновог троугла коме су дужине страница три узастопна природна броја. Применом Херонове формуле може се изразити низ површина P_n тих троуглова у функцији од b_n. Није тешко утврдити да је

$$P_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\, b_n \sqrt{b_n^2 - 4}.$$

Ако у ову формулу заменимо $b_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ (формула (3)), после краћег сређивања се добија

$$P_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\big[(7+4\sqrt{3})^n - (7-4\sqrt{3})^n\big]. \tag{6}$$

Директна провера сада показује да је

$$
\begin{aligned}
&14P_{n+1}-P_n\\
&\quad=14\,\frac{\sqrt{3}}{4}\big[(7+4\sqrt{3})^{n+1}-(7-4\sqrt{3})^{n+1}\big]-\frac{\sqrt{3}}{4}\big[(7+4\sqrt{3})^{n}-(7-4\sqrt{3})^{n}\big]\\
&\quad=\frac{\sqrt{3}}{4}(7+4\sqrt{3})^{n}[14(7+4\sqrt{3})-1]-\frac{\sqrt{3}}{4}(7-4\sqrt{3})^{n}[14(7-4\sqrt{3})-1]\\
&\quad=\frac{\sqrt{3}}{4}\big[(7+4\sqrt{3})^{n+2}-(7-4\sqrt{3})^{n+2}\big]=P_{n+2},
\end{aligned}
$$

а то је и требало доказати.

Доказ је било могуће извести и ако се запази да израз (6) има структуру општег решења линеарне диференцне једначине другог реда. Карактеристични бројеви $\lambda_{1,2}$ морају бити $7\pm4\sqrt{3}$, па та једначина мора бити $\lambda^2-14\lambda+1=0$. Дакле, низ (6) заиста задовољава једначину (5).

На сличан начин се може извести да низ површина P_n задовољава и диференцну једначину трећег реда

$$P_{n+3}=13(P_{n+2}+P_{n+1})-P_n.$$

Задаци

1. Дат је низ бројева $d_1=1$, $d_{n+1}=d_n+12n$, $n\in\mathbf{N}$. Доказати да тројка бројева $a_n=d_n+2$, $b_n=2d_n+2$, $c_n=3d_n+2$, за сваки природан број n, представља дужине страница Хероновог троугла. Табеларно представити првих десет троуглова ове класе.
2. Дат је низ b_n природних бројева дефинисан рекурентном формулом $b_{n+2}=4b_{n+1}-b_n$ и почетним условима $b_1=4$, $b_2=14$. Доказати да је за свако $n\in\mathbf{N}$ тројка (b_n-1,b_n,b_n+1) Херонова. Направити табелу са првих десет троуглова из ове класе.
3. Наћи везу између висина које одговарају средњим по величини страницама троуглова из претходног задатка и полупречника у њих уписаних кружница.
4. Доказати да центар кружнице уписане у Херонов троугао, коме странице чине аритметички низ, дели симетралу средњег по величини угла у односу $2:1$.
5. Доказати да за чланове низа (b_n) из другог задатка важи једнакост $b_{2n}=b_n^2-2$.
6. Нека је (r_n) низ полупречника уписаних кружница у троуглове из другог задатка. Доказати да за тај низ важи формула $r_n=4r_{n-1}-r_{n-2}$, а такође и формула $b_n=4r_n-2r_{n-1}$.