Мр Михајло Вељковић

(НЕ)ОБИЧАН ЧАС

Наши ученици се са векторима први пут сусрећу у настави физике у основној школи, а у настави математике се појам вектора обрађује у првом и трећем разреду гимназије. Специјално, по једном од захтева актуелног програма, ученик би на крају првог разреда гимназије требало да разуме линеарну (не)зависност вектора кроз посебне случајеве (не)колинеарности и (не)компланарности. Тако озбиљне ствари свакако обнављавамо и мало продубљавамо пре наставка изучавања вектора у трећем разреду. Разговарамо о веома апстрактном појму векторске базе – зашто се онда баш зато не би мало „изашло" из апстрактног света математике?[1]

Задатак 1. *Имамо на располагању:*

(а) Ц – *црвену,* Ж – *жуту и* П – *плаву боју. Да ли се од њих може мешањем добити:* Н – *наранџаста,* Љ – *љубичаста,* О – *окер,* Б – *браон,* Т – *тиркизна,* Ц′ – *црна боја?*

(б) *Исто питање ако су на располагању боје* Ц, Ж *и* П.

(в) *Исто питање ако су на располагању боје* З, Ж *и* П.

Да ли ове ситуације подсећају ученике на нешто што су раније учили?[2]

Ученици су мало зачуђени таквим задатком на часу математике (то смо за почетак успешно обавили!); настала пауза се може искористити да неко од ученика подсети које се боје добијају при одређеним комбинацијама неких уобичајених боја (на пример, ако се помешају једнаке количине плаве и црвене, добија се љубичаста, и сл).

Почињемо са презентацијом[3]: ако је у Декартовом координатном систему Oxy позитивна полуоса Ox обојена црвеном бојом Ц, а позитивна полуоса Oy плавом П, нека симетрала првог квадранта Oxy буде обојена смесом у којој су једнаке количине тих боја – дакле, љубичаста Љ! Такође, ако је позитивна полуоса Oz (у просторном систему $Oxyz$) обојена жуто Ж, нека су симетрале квадраната Oyz, Ozx обојене смесама у којима су једнаке количине одговарајућих

[1] Пожељно је да се за овај час користи Power point презентација или одговарајући специјално припремљени цртежи и макете.

[2] Наравно, осим из ликовног.

[3] Power point или помоћу штапа и канапа

боја, дакле – зелено З, односно наранџасто Н! Аналогно се онда остаци добијених квадраната боје разним међунијансама[4], и добија се обојени први октант у координатном систему $Oxyz$ простора.[5]

Претходно речено записујемо помоћу једнакости:

$$\text{Љ} = \frac{1}{2}\,\text{Ц} + \frac{1}{2}\,\text{П}, \quad \text{Н} = \frac{1}{2}\,\text{Ц} + \frac{1}{2}\,\text{Ж}, \quad \text{З} = \frac{1}{2}\,\text{Ж} + \frac{1}{2}\,\text{П},$$

а онда, на основу следећих „ликовних“ једнакости[6]:

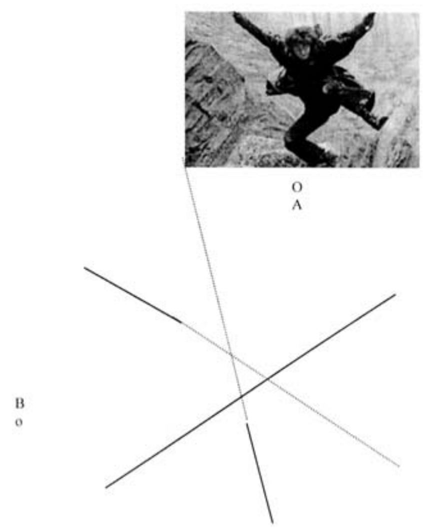
$$\text{О} = \frac{1}{2}\,\text{Н} + \frac{1}{2}\,\text{З}, \quad \text{Т} = \frac{1}{2}\,\text{Б} + \frac{1}{2}\,\text{Љ}, \quad \text{Б} = \frac{1}{2}\,\text{Н} + \frac{1}{2}\,\text{Љ}, \quad \text{Ц}' = \frac{7}{9}\,\text{О} + \frac{1}{9}\,\text{Б} + \frac{1}{9}\,\text{Т},$$

неко може речима да опише како се добија окер, тиркизна, браон и црна боја.

Одговори под (а) и (б) су потврдни: све тражене боје добијају се комбинацијама боја Ц, Ж и П, а зелена боја З није неопходна као основни материјал јер се може добити мешањем боја Ж и П.

(в) Одговор је негативан; не може се добити, на пример, црвена боја Ц[7] (то што имамо боје Ж, П и З је према претходном исто као да имамо само боје Ж и П).

Задатак 2. *Хари Потер треба да из неке галактичке позиције A стигне у позицију B уз услов да су унапред одређена три правца свих могућих кретања. Да ли може успети?*



[4] Постоје договори о уочавању девет међунијанси – видети нпр. у [3].

[5] Занимало ме је како се назива боја/нијанса која се добија тако што се помешају једнаке количине наведене три боје. Изгледа да нема неки посебан назив, зове се само изведена боја!?

[6] О комбинацијама боја може се више прочитати нпр. у [3]

[7] Детаљније видети нпр. у [3]

Неки ученици одмах закључују да једноставно пут AB треба *разложити* на компоненте дуж датих праваца. Ипак, да би сви боље разумели, урадимо исти задатак са конкретним подацима.

Задатак $2'$. *Да ли се може стићи из тачке* $A(1,-10,2)$ *у тачку* $B(1,1,11)$ *ако сва кретања могу бити само по правцима који су у координатном систему простора дати преко три компоненте „дуж" оса система*[8]*:*

(а) $c = (1,0,2)$, $d = (-1,3,0)$, $e = (0,0,-2)$;

(б) $c = (1,0,2)$, $d = (-1,0,2)$, $e = (0,0,-2)$;

(в) $c = (1,2,3)$, $d = (-2,7,3)$, $e = (-1,9,6)$.

Одредити такав пут ако постоји.

Прво неко од ученика понавља како се формула $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA}$ своди на збир вектора по „правилу троугла"[9] и конкретно израчунава: $\boldsymbol{AB} = (1,1,11) - (1,-10,2) = (0,11,9)$. Затим, неко други на табли[10] скицира координатни систем простора, приказује у њему тачке A и B, подсећа шта значи скраћени запис $\boldsymbol{AB} = (0,11,9)$ и одговара на лакше питање како се стиже од A до B ако су на располагању *правци оса* датог координатног система.

Враћамо се затим на задатак, односно на захтев да се дати вектор $\boldsymbol{AB}$ разложи на компоненте дуж праваца c, d и e. Ако је, рецимо, прва етапа неко кретање $\boldsymbol{AK} = \lambda\,\boldsymbol{c}$ правца c, друга $\boldsymbol{KT} = \mu\,\boldsymbol{d}$ правца d и трећа $\boldsymbol{TB} = \nu\,\boldsymbol{e}$ правца e, треба одредити константе λ, μ и ν да би се заиста „затворио пут" $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AK} + \boldsymbol{KT} + \boldsymbol{TB}$, ако такве вредности уопште постоје. Ученици сами закључују да треба решити векторску једначину $\lambda\boldsymbol{c} + \mu\boldsymbol{d} + \nu\boldsymbol{e} = \boldsymbol{AB}$ по непознатим λ, μ и ν ($\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ су параметри)[11].

(а) Једначина $(0,11,9) = \lambda(1,0,2) + \mu(-1,3,0) + \nu(0,0,-2)$ своди се на систем једначина

$$\lambda - \mu = 0, \quad 3\mu = 11, \quad 2\lambda - 2\nu = 9,$$

чије је решење $\lambda = 11/3$, $\mu = 11/3$, $\nu = -5/6$, односно добили смо да пут постоји и да важи $\boldsymbol{AB} = \dfrac{11}{3}\,\boldsymbol{c} + \dfrac{11}{3}\,\boldsymbol{d} - \dfrac{5}{6}\,\boldsymbol{e}$, као линеарна комбинација три основна кретања.

Доцртавамо на претходној слици како се дакле стигло из A у B и, пре него што су потом урађени остали делови задатка, ученици коментаришу да је задатак имао решење јер су правци датих вектора некомпланарни; у случају када су на располагању три правца која нису паралелна истој равни, може се из било које позиције A стићи у било коју позицију B. А ако су дати правци паралелни једној равни α? Дечак се онда може кретати само у равни β која садржи тачку A и паралелна је са равни α; неко закључује да је један правац био сувишан јер се може постићи помоћу друга два. Коначно, кретање је ограничено само на једну праву кроз A у најспецијалнијем случају ако су дата три иста правца.

[8] Притом, користе се уобичајене скраћене ознаке.

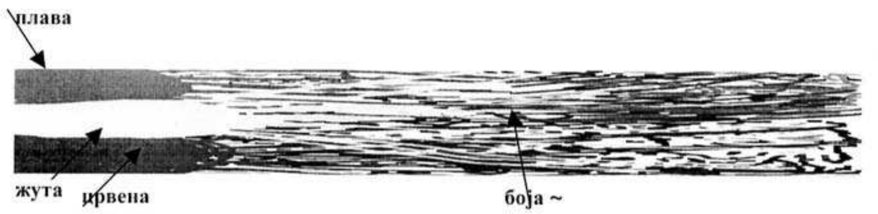
[9] Ту формулу смо у међувремену свакако научили и напамет јер се доста користи управо код одређивања координата усмерене дужи ако су дате координате крајњих тачака.

[10] Или је и за то спремна анимација у Power point презентацији.

[11] Слику можемо евентуално доцртати после конкретног решавања, као илустрацију.

Ученици потом решавају одговарајуће системе; у (б) се добија противуречан систем (јер по датим подацима важи $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}$, а с друге стране вектор $\boldsymbol{AB}$ се не може изразити помоћу $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$), па постављени задатак нема решења. У (в) је систем неодређен (јер по датим подацима важи $2\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{e}$) – дакле, и према подацима из (в) Хари може из A да дође у B али само захваљујући огромној срећи што два дата правца са тачком A одређују раван баш кроз тачку B!

Задатак 1′. *Нека машина прави боју под шифром ∼ тако што меша следеће боје: црвену, жуту, зелену и плаву, узимајући одређену количину од сваке. Упоредити са подацима из задатка 1. Коментар?*



Како се боја З добија као комбинација боја Ж и П: $З = \frac{1}{2}Ж + \frac{1}{2}П$, то З није неопходна[12]. Дакле, намеће се констатација да ће и овај модел ипак бити „димензије три“, као и у другом задатку[13]. Записујемо $Б = x\,Ц + y\,П + x\,Ж$, тј. да се свака боја Б добија као линеарна комбинација три основне боје. x, y и z су реални бројеви из $[0,1]$, такви да је $x+y+z=1$; (П,Ж,Ц) јесте једна тројка боја преко којих се могу „изразити“ све боје – кажемо да је (П,Ж,Ц) једна база[14]. С друге стране, (П,Ж,З) није база – постоје боје које не могу да се добију мешањем П, Ж и З; опет бисмо се као у задатку 2′ „кретали само у једној равни“![15]

Можда ће понеко од ђака после овог часа бити заинтересован да сазна нешто више о физичким аспектима боје као феномена, као и о даљим апстракцијама везаним за линеарну (не)зависност вектора. Сарадње математике са другим дисциплинама и „са свакодневним животом и праксом“ толико има да се она никако не може избегавати, а још мање се може на силу наметати и тамо где не постоји. Задатак нам је да такве природне спојеве препознамо и прикажемо у одељењу као (не)обичну част, божји дар, а све у циљу развитка наставе математике[16].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. В. Балк, В. Г. Болтянский, *Геометрия масс*, Наука, Москва 1987.
2. C. G. Mueller, M. Rudolph, *Svjetlost i vid*, Časopis Life, Mladost, 1972.
3. П. Васић, *Увод у ликовне уметности*, Уметничка академија, Београд 1968.

[12] Често се међутим користи из одређених практичних разлога.

[13] Тренутак размишљања о том магичном броју ТРИ.

[14] Постоји бесконачно много база од по три боје – видети у [1]. Три боје семафора такође могу бити једна база!

[15] И о томе детаљније у [1]; нпр. о недостатку званом далтонизам.

[16] Посебно, пуно таквих веза има између појединих делова математике. Зар Питагорина теорема, на пример, треба да буде само једна лекција?!